Рациональные функции на алгебраических кривых и коммутирующие разностные операторы.

А.Е. Миронов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Омский алгебраический семинар
15 февраля 2024 г, Омск

I. Коммутирующие дифференциальные и разностные операторы ранга 1.

II. Параметры Тюрина. Коммутирующие операторы ранга $l > 1$.

"Похожие"операторы

$$L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_3 x,$$

$$\tilde{L}_4 = (T + (\alpha_3 n^3 + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0)T^{-1})^2 + g(g+1)\alpha_3 n,$$

"Дискретизация"оператора Ламе

$$L_2 = -\partial_x^2 + g(g+1)\wp(x+\omega), \qquad \Lambda = \{2\omega\mathbb{Z} + 2\omega'\mathbb{Z}\}$$

$$\tilde{L}_2 = \left(T - \frac{\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}\right)^2 - c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1}, \quad g = 1$$

где

$$F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \big(-2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon), \quad g = 1.$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\big(\zeta(\varepsilon) + \zeta(3\varepsilon) + \zeta(x-2\varepsilon) - \zeta(x+2\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon), \quad g = 2.$$

Можно ли "расширить"коммутирующие дифференциальные операторы

$$L_n = \partial_x^n + u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \ldots + u_0(x), \quad L_m = \partial_x^m + v_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \ldots + v_0(x)$$

до коммутирующих разностных операторов

$$\tilde{L}_n = \frac{T_\varepsilon^n}{\varepsilon^n} + \tilde{u}_{n-1}(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}} + \ldots + \tilde{u}_0(x,\varepsilon),$$

$$\tilde{L}_m = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + \tilde{v}_{m-1}(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \ldots + \tilde{v}_0(x,\varepsilon),$$

$T_\varepsilon f(x) = f(x+\varepsilon)$ с сохранением спектральной кривой, со свойством $\mathcal{A}_q = \mathcal{A}(\varepsilon)$ и

$$\tilde{L}_n = L_n + O(\varepsilon), \qquad \tilde{L}_m = L_m + O(\varepsilon)?$$

В случае операторов ранга 1 такое расширение возможно.

Спектральные данные Кричевера:

$$\tilde{S} = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1 + \ldots + \gamma_g\}, \quad f(P) \to L_f$$

Спектральные данные для разностных операторов:

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1 + \ldots + \gamma_g, p(x,\varepsilon)\}, \quad p(x,\varepsilon) \in \Gamma$$

Если $p(x,\varepsilon) \to q$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$\tilde{L}_f = L_f + O(\varepsilon).$$

$$L_n = \partial_x^n + u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \ldots + u_0(x), \quad L_m = \partial_x^m + v_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \ldots + v_0(x)$$

Лемма (Burchnall, Chaundy)

Если $L_n L_m = L_m L_n$, то существует полином $Q(z,w) \not\equiv 0$ такой, что $Q(L_n, L_m) = 0$.

Пример 1:

$$L_2 = \partial_x^2 - \frac{2}{x^2}, \qquad L_3 = \partial_x^3 - \frac{3}{x^2}\partial_x + \frac{3}{x^3},$$

$$L_2^3 = L_3^2, \quad Q(z,w) = z^3 - w^2.$$

Спектральная кривая

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : Q(z, w) = 0\}.$$

Если $L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi$, то $(z, w) \in \Gamma$.

Ранг

$$l = \dim\{\psi : L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi\}.$$

Пример 2

$$L_4 = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + g(g+1)x, \quad L_{4g+2}$$
$$\Gamma : w^2 = z^{2g+1} + c_{2g} z^{2g} + \ldots + c_0.$$

Функция Бейкера–Ахиезера

Спектральные данные

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots \gamma_g\}$$

Существует единственная функция $\psi(x, P)$, $P \in \Gamma$ свойствами

1. $\psi = e^{kx}(1 + \frac{\xi(x)}{k} + \dots)$

2. На $\Gamma \backslash \{q\}$ ψ имеет простые полюсы в точках $\gamma_1, \dots \gamma_g$.

$f(P)$, $g(P)$ — мероморфные функции на Γ с полюсами порядков n и m в q. Тогда

$$L_n\psi = f(P)\psi \qquad L_m\psi = g(P)\psi,$$

$$L_nL_m = L_mL_n.$$

Пример 3

$$\Gamma = \mathbb{C}/\{2w\mathbb{Z} + 2w'\mathbb{Z}\}, \quad q = 0,$$

$$\psi = e^{-x\zeta(z)} \frac{\sigma(z+x)}{\sigma(x)\sigma(z)},$$

$$(\partial_x^2 - 2\wp(x))\psi(x,z) = \wp(z)\psi(x,z),$$

$$(\partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x))\psi(x,z) = \frac{1}{2}\wp'(z)\psi(x,z).$$

Коммутирующие дискретные операторы

$$L_k = \sum_{j=-N_-}^{N_+} u_j(n)T^j, \qquad L_m = \sum_{j=-M_-}^{M_+} v_j(n)T^j,$$

$$Tf(n) = f(n+1), \qquad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

Коммутативное кольцо дискретных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой с m полюсами. Такие операторы называются *m–точечными операторами*.

Спектральные данные для двухточечных операторов ранга 1 были найдены И. М. Кричевером и Д. Мамфордом. Собственные функции двухточечных операторов ранга 1 (функции Бейкера–Ахиезера) могут быть найдены явно через тэта–функцию спектральных кривых. Спектральные данные для одноточечных операторов ранга $l > 1$ были получены И. М. Кричевером и С. П Новиковым.

Одноточечные операторы ранга один

Возьмем следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_g, q, k^{-1}, p_n\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g, $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ, $q \in \Gamma$ — фиксированная точка, k^{-1} — локальный параметр около q, $p_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{Z}$ — набор точек в общем положении.

Теорема 1

Существует единственная функция (функция Бейкера–Ахиезера) $\psi_n(P)$, $n \in \mathbb{Z}$, $P \in \Gamma$,который имеет следующие свойства.

1. $\psi_0(P) = 1$.

2. Дивизор нулей и полюсов ψ имеет вид

$$\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n) + P_1 + \ldots + P_n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_g - nq, \quad n \geq 0,$$

$$\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n) - P_{-1} - \ldots - P_n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_g - nq, \quad n < 0.$$

3. В окрестности q функция ψ имеет вид

$$\psi = k^n + O(k^{n-1}).$$

Для мероморфной функции $g(P)$ на Γ с единственным полюсом порядка m в q с разложением $g(P) = k^m + O(k^{m-1})$ существует единственный разностный оператор $\tilde{L}_m$ такой, что $\tilde{L}_m \psi = z\psi$.

Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую Γ, заданную уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \ldots + c_0,$$

$q = \infty$. Пусть $\psi_n(P)$ — соответствующая функция Бейкера–Ахиезера. Тогда существуют коммутирующие операторы $\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_{2g+1}$ такой, что

$$\tilde{L}_2\psi = \big((T + U_n)^2 + W_n\big)\psi = z\psi, \quad \tilde{L}_{2g+1}\psi = w\psi.$$

Теорема 2

Имеет место равенство

$$\tilde{L}_2 - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi(n, P))(T - \chi(n, P)),$$

где

$$\chi = \frac{\psi(n+1, P)}{\psi(n, P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n},$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n) z^{g-1} + \ldots + \delta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Функции U_n, W_n, S_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + (z - U_n^2 - W_n) Q_n Q_{n+1}.$$

Теорема 3

В случае эллиптической спектральной кривой Γ, заданной уравнением

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

оператор $\tilde{L}_2$ вида

$$\tilde{L}_2 = (T + U_n)^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -\frac{\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

γ_n — произвольный функциональный параметр, коммутирует с некоторым оператором

$$\tilde{L}_3 = \tilde{L}_2(T + U_n) - \gamma_{n+2} T - (\sqrt{F_1(\gamma_n)} + U_n \gamma_n).$$

Теорема 4

Оператор

$$L_2^{\sharp} = (T + r_1 \cos(n))^2 + \frac{r_1^2 \sin(g) \sin(g+1)}{2 \cos^2(g + \frac{1}{2})} \cos(2n),$$

$r_1 \neq 0$ коммутирует с оператором $L_{2g+1}^{\sharp}$.

Теорема 5

Оператор

$$L_2^{\checkmark} = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2^2 n^2, \quad \alpha_2 \neq 0$$

коммутирует с оператором $L_{2g+1}^{\checkmark}$.

Возьмем следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, p(x, \varepsilon)\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g, $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ, $q \in \Gamma$ — фиксированная точка, $p(x, \varepsilon) \in \Gamma$ — гладкое семейство точек такое, что $p(x, 0) = q$. Предположим, что координата точки $p(x, \varepsilon)$ имеет вид

$$k^{-1}(p) = \frac{\varepsilon}{p_1(x)} + \varepsilon^2 p_2(x) + \ldots$$

Теорема 6

Существует единственная мероморфная функция $\chi(x, \varepsilon, P), P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.

1. Дивизор нулей и полюсов χ имеет вид

$$(\chi) = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) + p(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon) - q,$$

$\gamma(x, \varepsilon) = \gamma_1(x, \varepsilon) + \ldots + \gamma_g(x, \varepsilon)$, причем $\gamma(0, \varepsilon) = \gamma$.

2. В окрестности q функция χ имеет разложение

$$\chi = \frac{k}{p_1(x)} + O(1).$$

3. $\chi = \frac{1}{\varepsilon} + O(1)$.

Пусть $f(P)$ — мероморфная функция на Γ с единственным полюсом порядка m в q. Тогда существует единственный разностный оператор

$$L(f) = u_m(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \ldots + u_0(x,\varepsilon),$$

$u_m(x,\varepsilon) = p_1(x)p_1(x+\varepsilon)\ldots p_1(x+(m-1)\varepsilon)$ такой, что

$$L(f) - f(P) = \tilde{L}(f)\big(p_1(x)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x,\varepsilon,P)\big),$$

где $\tilde{L}(f)$ — некоторый разностный оператор порядка $m-1$, коэффициенты которого — функции от x и P. Для другой мероморфной функции $g(P)$ с единственным полюсом в q операторы $L(f)$ и $L(g)$ коммутируют. Причем

$$L(f) = \tilde{u}_m(x)\partial_x^m + \tilde{u}_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \cdots + \tilde{u}_0(x) + O(\varepsilon).$$

Пример 4

Пусть $\Gamma = \mathbb{C}/\Lambda$ — эллиптическая кривая, $\Lambda = \{2n\omega + 2m\omega', n, m \in \mathbb{Z}\}$.

$$\chi(x,z) = \zeta(z) - \zeta(z - \gamma(x,\varepsilon)) - \zeta(\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)) + \zeta(p(x,\varepsilon)),$$

где $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса, $p(x,\varepsilon) = \gamma(x+\varepsilon,\varepsilon) - \gamma(x,\varepsilon)$. Тогда

$$L_2\psi = \Big(\big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon^2} + U(x,\varepsilon)\big)^2 + W(x,\varepsilon)\Big)\psi = \wp(z)\psi,$$

где

$$U(x,\varepsilon) = \zeta(\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)) - \zeta(\gamma(x,\varepsilon)) - \zeta(p(x,\varepsilon)),$$
$$W(x,\varepsilon) = -\wp(\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)) - \wp(\gamma(x,\varepsilon)),$$

$\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

Предположим, что функция $\gamma(x,\varepsilon)$ имеет разложение

$$\gamma(x,\varepsilon) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\varepsilon + \alpha_2(x)\varepsilon^2 + \dots,$$

тогда

$$p(x,\varepsilon) = \alpha_0'(x)\varepsilon + (\alpha_1'(x) + \frac{\alpha_0''(x)}{2})\varepsilon^2 + \dots$$

Положим для простоты $\alpha_0(x) = x, \alpha_1(x) = const$. Тогда

$$U(x,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad W(x,\varepsilon) = -2\wp(x) + O(\varepsilon),$$

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Таким образом оператор L_2 переходит в оператор Ламе при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $a_j, b_j,\ j = 1, \dots, g$ — базис циклов на Γ с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис нормированных абелевых дифференциалов $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$.

Многообразие Якоби

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g\}, \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ji} = \int_{b_i} \omega_j .$$

Тэта–функция

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} exp\big(\pi i n^t \Omega n + 2\pi i n^t z\big).$$

$$\theta(z+n) = \theta(z), \quad n \in \mathbb{Z}^g,$$

$$\theta(z + \Omega m) = exp\big(-\pi i m^t \Omega m - 2\pi i m^t z\big)\theta(z), \quad m \in \mathbb{Z}^g.$$

Двухточечные операторы ранга один ($p_n = p$)

$$w^2 = z^{2g+2} + c_{2g+1} z^{2g+1} + \ldots + c_0, \quad p = +\infty, \ q = -\infty.$$

Теорема (И.М. Кричевер)

Функции $\psi_k(P)$ имеют вид

$$\psi_k(P) = a_k \exp\left(k \int_{P_0}^{P} \Omega\right) \frac{\theta(A(P) + kU + \zeta)}{\theta(A(P) + \zeta)}, \quad a_k = const,$$

и удовлетворяют разностному уравнению

$$c_{k+1}\psi_{k+1} + v_k \psi_k + c_k \psi_{k-1} = z\psi_k,$$

где

$$v_k = \frac{d}{dk} \log \frac{\theta((k-1)U + \zeta)}{\theta(kU + \zeta)},$$

$$c_k = \frac{\theta((k+1)U + \zeta)\theta((k-1)U + \zeta)}{\theta^2(kU + \zeta)}.$$

Пример 5

Если в примере 4 положит $\gamma(x,\varepsilon) = x - \varepsilon$, тогда

$$\chi(x,z) = \zeta(z) - \zeta(z - x + \varepsilon) - \zeta(x) + \zeta(\varepsilon),$$

$$L_2 = \Big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon^2} + U(x,\varepsilon)\Big)^2 + W(x,\varepsilon),$$

где

$$U(x,\varepsilon) = -\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x),$$

$$W(x,\varepsilon) = -\wp(x) - \wp(x-\varepsilon),$$

$\zeta(z)$, $\wp(z)$ — функции Вейерштрасса.

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Рассмотрим функцию $A_g(x, \varepsilon)$, определенную следующим образом. Положим

$$A_1 = -2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + \varepsilon)$$

и

$$A_2 = -\frac{3}{2}\big(\zeta(\varepsilon) + \zeta(3\varepsilon) + \zeta(x - 2\varepsilon) - \zeta(x + 2\varepsilon)\big).$$

Далее, для нечетных $g = 2g_1 + 1$, положим

$$A_g = A_1 \prod_{k=1}^{g_1} \left(1 + \frac{\zeta(x - (2k+1)\varepsilon) - \zeta(x + (2k+1)\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k+1)\varepsilon)}\right),$$

и для четных $g = 2g_1$, положим

$$A_g = A_2 \prod_{k=2}^{g_1} \left(1 + \frac{\zeta(x - 2k\varepsilon) - \zeta(x + 2k\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k-1)\varepsilon)}\right).$$

Теорема 7

Оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A_g(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon)$$

коммутирует с L_{2g+1}. Более того,

$$L_2 = \partial_x^2 - g(g+1)\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Пусть ω_{pq} — мероморфная 1-форма такой, что

$$Res_p \omega_{pq} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad Res_q \omega_{pq} = -\frac{1}{\varepsilon} \quad \int_{a_i} \omega_{pq} = 0, \quad p = p(x, \varepsilon).$$

Отображение Абеля $A : \Gamma \to J(\Gamma)$

$$A(P) = (\int_q^P \omega_1, \ldots, \int_q^P \omega_g).$$

Пусть $\zeta = A(\gamma) + \mathcal{K} = A(\gamma_1) + \ldots + A(\gamma_g) + \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — вектор римановых констант. Пусть $V(x, \varepsilon)$ — решение разностного уравнения

$$\frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_b \omega_{pq} = V(x + \varepsilon, \varepsilon) - V(x, \varepsilon), \quad V(0, \varepsilon) = 0,$$

$\int_b \omega_{pq}$ — вектор b-периодов, составленный из $\int_{b_j} \omega_{pq}$. Тогда

$$\chi = \exp\left(\varepsilon \int_{P_0}^P \omega_{pq}\right) \frac{\theta(A(P) + V(x + \varepsilon) + \zeta)\theta(V(x) + \zeta)}{\theta(A(P) + V(x) + \zeta)\theta(V(x + \varepsilon) + \zeta)\xi},$$

где $\xi = \xi(x, \varepsilon)$ — нормировочный коэффициент.

Теорема 8

Имеют место разложения

$$U(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad W(x,\varepsilon) = -2\partial_x^2 \log(\theta(Bx+\zeta)) + c$$

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\partial_x^2 \log(\theta(Bx+\zeta)) + c + O(\varepsilon)$$

Rank $l > 1$

Спектральные данные (И.М. Кричевер)

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{lg}, \alpha_1, \dots, \alpha_{lg}\}$$

$\alpha_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{il-1})$ — вектор

(γ, α) — параметры Тюрина определяют полустабильное векторное расслоение ранга l степени lg на Γ с голоморфными сечениями $\eta_1, \dots, \eta_l$

$$\eta_l(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_{ij} \eta_j(\gamma_i).$$

Функция Бейкера–Ахиезера

$\psi(x,P) = (\psi_0(x,P),\dots,\psi_{l-1}(x,P))$:

1. $\psi(x,P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s}\right) \Psi_0(x,P)$, $\xi_0 = (1,0,\dots,0)$, $\frac{d}{dx}\Psi_0 = A\Psi_0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ k+u_0(x) & u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_{l-1}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

2. on $\Gamma - \{q\}$ ψ — мероморфна с простыми полюсами в $\gamma_1,\dots,\gamma_{lg}$

3. $\mathrm{Res}_{\gamma_i}\psi_j = \alpha_{ij}\mathrm{Res}_{\gamma_i}\psi_{l-1}$.

Если $f(P)$ — мероморфная функция с полюсом в q порядка n, то существуют $L(f)$ такие, что

$$L(f)\psi(x,P) = f(P)\psi(x,P), \quad \mathrm{ord}L(f) = ln.$$

Метод деформации параметров Тюрина (метод Кричевера–Новикова)

$$\frac{d^l}{dx^l}\psi_j = \chi_{l-1}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\psi_j + \cdots + \chi_0\psi_j$$

χ_s — мероморфна на Γ, χ_s имеет lg простых полюсов $P_1(x), \dots, P_{lg}(x)$. В окрестности q функции χ_s имеют вид

$$\chi_0(x,P) = k + g_0(x) + O(k^{-1}),$$

$$\chi_j(x,P) = g_j(x) + O(k^{-1}), \quad j < l-1,$$

$$\chi_{l-1}(x,P) = O(k^{-1}).$$

В точке $P_i(x)$

$$\chi_j = \frac{c_{ij}(x)}{k-\gamma_i(x)} + d_{ij}(x) + O(k-\gamma_i(x)).$$

Теорема

Параметры $\gamma_i(x), \alpha_{ij}(x) = \frac{c_{ij}(x)}{c_{i,l-1}(x)}$ и $d_{ij}(x), 0 \le j \le l-2, 1 \le i \le lg$ удовлетворяют уравнению

$$c_{i,l-1}(x) = -\gamma_i'(x),$$

$$d_{i0}(x) = \alpha_{i0}(x)\alpha_{i,l-2}(x) + \alpha_{i0}(x)d_{i,l-1}(x) - \alpha_{i0}'(x),$$

$$d_{ij}(x) = \alpha_{ij}(x)\alpha_{i,l-2}(x) - \alpha_{i,j-1}(x) + \alpha_{ij}(x)d_{i,l-1}(x) - \alpha_{ij}'(x), j \ge 1.$$

И.М. Кричевер, С.П. Новиков: $g = 1, \ l = 2$

$\Gamma : \mu^2 = P_3(\lambda) = 4\lambda^3 + g_2\lambda + g_3$

$$L_{KN} = \left(\partial_x^2 + u\right)^2 + 2c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1))\partial_x + (c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)))_x - \wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1),$$

$$\gamma_1(x) = \gamma_0 + c(x), \ \gamma_2(x) = \gamma_0 - c(x),$$

$$u(x) = -\frac{1}{4c_x^2} + \frac{1}{2}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2} + 2\Phi(\gamma_1, \gamma_2)c_x - \frac{c_{xxx}}{2c_x} + c_x^2(\Phi_c(\gamma_0 + c, \gamma_0 - c) - \Phi^2(\gamma_1, \gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1, \gamma_2) = \zeta(\gamma_2 - \gamma_1) + \zeta(\gamma_1) - \zeta(\gamma_2).$$

Оператор шестого порядка $\tilde{L}_{KN}$, который коммутирует с L_{KN} можно найти из уравнения $\tilde{L}_{KN}^2 = P_3(L_{KN})$.

Диксьме: $g = 1, \ l = 2$

$$L_D = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^2 - 2x,$$

$$\tilde{L}_D = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^3 - \frac{3}{2}\left(x\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)x\right).$$

Теорема (П.Г. Гриневич)

Коммутирующие операторы L_{KN} и $\tilde{L}_{KN}$, отвечающие эллиптической кривой, имеют рациональные коэффициенты тогда и только тогда, когда

$$c(x) = \int_{q(x)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{P_3(t)}},$$

где $q(t)$ — рациональная функция.

Если $\gamma_0 = 0$ и $q(x) = x$, тогда $L_{KN} = L_D$.

Теорема (П.Г. Гриневич, С.П. Новиков)

Оператор L_{KN} самосопряженный тогда и только тогда, когда $\wp(\gamma_1) = \wp(\gamma_2)$.

О.И. Мохов: $g = 1, \; l = 3$

$l = 2,\ \ g > 1$: самосопряженный случай

Пусть L — оператор четвертого порядка ранга 2, тогда

$$\Gamma : w^2 = F(z) = z^{2g+1} + c_{2g} z^{2g} + \cdots + c_0,$$

$q = \infty$ –– точка ветвления,

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \quad \sigma(z, w) = (z, -w).$$

Имеем

$$L_4 \psi = z\psi, \qquad L_{4g+2}\psi = w\psi,$$

$$\psi'' = \chi_0 \psi + \chi_1 \psi',$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — функция Бейкера–Ахиезера.

Теорема 9

Оператор L_4 — самосопряженный тогда и только тогда, когда

$$\chi_1(x, P) = \chi_1(x, \sigma(P)).$$

При $g = 1$ теорема доказана П.Г. Гриневичем и С.П. Новиковым.

Теорема 10

Если L_4 — самосопряженный оператор

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x),$$

тогда

$$\chi_0 = -\frac{1}{2}\frac{Q_{xx}}{Q} + \frac{w}{Q} - V, \qquad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q},$$

где

$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x)z^{g-1} + \cdots + \alpha_0(x).$$

Функция Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z) = 4(z - W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_xQ_{xxx}+$$

$$2Q(2V_xQ_x + 4VQ_{xx} + Q^{(4)}).$$

Следствие

Функция Q удовлетворяет линейному уравнению

$$\partial_x^5 Q + 4VQ_{xxx} + 6V_xQ_{xx} + 2(2z - 2W + V_{xx})Q_x - 2W_xQ = 0.$$

Примеры

1. $L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_3 x,$

2. $L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_1 \cos(x) + \alpha_0)^2 - \alpha_1 g(g+1)\cos(x),$

3. $L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_1 e^x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1) e^x$ (В.Н. Давлетшина),

4. $L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_1 \wp(x) + \alpha_0)^2 + s_1 \wp(x) + s_2 \wp^2(x),$
$\alpha_1 = \frac{1}{4} - 2g^2 - 2g,\ s_2 = -4g(g+2)(g^2-1),\ s_1 = \frac{1}{4} g(g+1)(16\alpha_0 + 5g)2,$
$(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) + g_2\wp^2(x) + g_1\wp(x) + g_0.$

Пусть φ — решение уравнения $(\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\varphi = 0.$

Теорема 11

1. Пусть $g = 2,\ z$ — решение уравнения $z^2 + 4\alpha_2 z + 12\alpha_1\alpha_3 = 0$. Тогда

$$((\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + \alpha_3 6x)\psi = z\psi,$$

где $\psi = p\varphi,\ p(x) = 6\alpha_3 x + z + 4\alpha_2.$

2. Пусть $g = 4,\ z$ — решение уравнения

$$z^3 + 20\alpha_2 z^2 + 16(4\alpha_2^2 + 13\alpha_1\alpha_3)z + 320\alpha_3(7\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2) = 0.$$

Тогда

$$((\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + \alpha_3 20)x)\psi = z\psi,$$

где $\psi = p\varphi$,
$p(x) = 280\alpha_3^2 x^2 + 20\alpha_3(z + 16\alpha_2)x + z^2 + 20\alpha_2 z + 64\alpha_2^2 + 168\alpha_1\alpha_3.$

$$L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + \alpha_3 g(g+1)x.$$

Пусть $l_4 = p^{-1} L_4 p, \quad l_{4g+2} = p^{-1} L_{4g+2} p.$

Теорема 12

При $g = 2, 4$ операторы $l_4,\ l_{4g+2},\ L_2 = \partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ образуют коммутативное кольцо по модулю L_2, т.е.

$$[l_4, L_2] = B_1 L_2, \quad [l_{4g+2}, L_2] = B_2 L_2,$$

где B_1, B_2 — некоторые операторы.

$$L_{KN}=\left(\partial_x^2+u\right)^2+2c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1))\partial_x+(c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1)))_x-\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1),$$

$$\gamma_1(x)=\gamma_0+c(x),\ \gamma_2(x)=\gamma_0-c(x),$$

$$u(x)=-\frac{1}{4c_x^2}+\frac{1}{2}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2}+2\Phi(\gamma_1,\gamma_2)c_x-\frac{c_{xxx}}{2c_x}+c_x^2(\Phi_c(\gamma_0+c,\gamma_0-c)-\Phi^2(\gamma_1,\gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1,\gamma_2)=\zeta(\gamma_2-\gamma_1)+\zeta(\gamma_1)-\zeta(\gamma_2).$$

Теорема 13

$\forall m>0$ и Γ, заданной уравнением $w^2=z^3+c_2z^2+c_1z+c_0$, существуют многочлены

$$V_m=\alpha_{m+2}x^{m+2}+\ldots+\alpha_0,\quad W_m=\beta_mx^m+\ldots+\beta_0,\quad \alpha_{m+2}\neq 0,\beta_m\neq 0$$

такой, что оператор $L_{4,m}=(\partial_x^2+V_m(x))^2+W_m(x)$ коммутирует с оператором $L_{6,m}$. Спектральная кривая $L_{4,m},\ L_{6,m}$ совпадает с Γ.

Теорема 14

Множество орбит группы $Aut(A_1)$ в пространстве решений уравнения

$$Y^2 = X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0, \quad X, Y \in A_1$$

бесконечно.

$$L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 \cosh x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1)\cosh x, \quad \alpha_1 \neq 0$$

коммутирует с $L_{4g+2}^\natural$. Спектральная кривая $\Gamma^\natural$ имеет вид

$$w^2 = z^{2g+1} + c_{2g}^\natural z^{2g} + \cdots + c_1^\natural z + c_0^\natural.$$

Коэффициент $c_j^\natural$ можно найти с помощью формулы рекурсии. Для малых g прямым вычислением можно проверить, что $\Gamma^\natural$ невырождена для общего набора параметров $\alpha_0,\ \alpha_0$.

О.И. Мохов нашел замечательную замену переменной

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})^r, \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

что сводит операторы $L_4^\natural$, $L_{4g+2}^\natural$ к операторам с полиномиальными коэффициентами.

$$L_4^\natural = ((1 - y^2)\partial_y^2 - 3y\partial_y + aT_r(y) + b)^2 - ar^2 g(g+1)T_r(y), \quad a \neq 0,$$

b — произвольная константа, $T_r(y)$ — полином Чебышева степени $|r|$. Напомним, что

$$T_0(y) = 1, T_1(y) = y, T_r(y) = 2yT_{r-1}(y) - T_{r-2}(y), T_{-r}(y) = T_r(y).$$

Многочлены Чебышева являются коммутирующими многочленами, т.е.

$$T_n(T_m(y)) = T_m(T_n(y)) = T_{n+m}(y).$$

Если применить автоморфизм

$$\varphi(y) = -\partial_y, \qquad \varphi(\partial_y) = y, \quad \varphi \in Aut(A_1)$$

к $L_4^\natural, \ L_{4g+2}^\natural$ получим операторы $L_{2r}^\natural, \ L_{(2g+1)r}^\natural$ ранга r

$$L_{2r}^\natural = (aT_r(\partial_y) - y^2\partial_y^2 - 3y\partial_y + y^2 + b)^2 - arg(g+1)T_r(\partial_y).$$

Теорема 15

Множество орбит группы $Aut(A_1)$ в пространстве решений уравнения

$$Y^2 = X^{2g+1} + c^\natural_{2g} X^{2g} + \cdots + c^\natural_1 X + c^\natural_0, \quad X, Y \in A_1$$

бесконечно.

Одноточечные операторы ранга два

Пусть

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + c_{2g-1}z^{2g-1} + \ldots + c_0,$$

$$L_4 = \sum_{i=-2}^{2} u_i(n)T^i, \qquad L_{4g+2} = \sum_{i=-(2g+1)}^{2g+1} v_i(n)T^i, \qquad u_2 = v_{2g+1} = 1,$$

при этом

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad \psi = \psi(n,P), \quad P = (z,w) \in \Gamma,$$

$$\psi(n+1,P) = \chi_1(n,P)\psi(n-1,P) + \chi_2(n,P)\psi(n,P).$$

Теорема (И.М. Кричевер, С.П. Новиков)

Матричная функция $\chi(n,P)$ имеет на Γ простые полюсы в точках $\gamma_j(n)$. Имеют место соотношения на вычеты матричных элементов

$$\alpha_s^j Res_{\gamma_s(n)}\chi_i(n,P) = \alpha_s^i Res_{\gamma_s(n)}\chi_j(n,P).$$

Точки $\gamma_s(n+1)$ являются нулями определителя матрицы $\chi(n,P)$, т.е.

$$\det\chi(n,\gamma_s(n+1)) = 0.$$

Вектор $\alpha_j(n+1)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha_j(n+1)\chi(n,\gamma_j(n+1)) = 0.$$

Пример

$$L = L_2^2 - \wp(\gamma_n) - \wp(\gamma_{n-1}),$$

где L_2 — разностный оператор Шредингера

$$L_2 = T + v_n + c_n T^{-1}$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{4}(s_{n-1}^2 - 1)F(\gamma_n, \gamma_{n-1})F(\gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}),$$

$$v_n = \frac{1}{2}\left(s_{n-1}F(\gamma_n, \gamma_{n-1}) - s_n F(\gamma_{n-1}, \gamma_n)\right),$$

$$F(u, v) = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v).$$

Здесь $\wp(u)$, $\zeta(u)$ — функции Вейерштрасса, s_n, γ_n — функциональные параметры.

$$\chi_1(n,P)=\chi_1(n,\sigma(P)),\quad L_4=\left(T+U_n+V_nT^{-1}\right)^2+W_n.$$

Теорема 16

Имеет место разложение на множители

$$L_4-z=\left(T+A_n+B_nT^{-1}\right)\left(T-\chi_2(n)-\chi_1(n)T^{-1}\right),$$

где

$$A_n=U_n+U_{n+1}+\chi_2(n+1),\qquad B_n=-\frac{V_nV_{n-1}}{\chi_1(n-1)},$$

$$\chi_1(n)=-\frac{V_nQ_{n+1}}{Q_n},\qquad \chi_2(n)=\frac{S_n}{Q_n}+\frac{w}{Q_n},$$

$$Q_n=-\frac{S_{n-1}+S_n}{U_{n-1}+U_n},\quad S_n(z)=-U_nz^g+\delta_{g-1}(n)z^{g-1}+\ldots+\delta_0(n),$$

$\delta_j(n)$ — некоторые функции. Функции $U_n, V_n, W_n, S_n(z)$ удовлетворяют уравнению

$$F_g(z)=S_n^2+V_nQ_{n-1}Q_{n+1}+V_{n+1}Q_nQ_{n+2}+(z-U_n^2-V_n-V_{n+1}-W_n)Q_nQ_{n+1}.$$

Пример 6

Оператор

$$L_4 = (T + a + (r_3 n^3 + r_2 n^2 + r_1 n + r_0) T^{-1})^2 + g(g+1) r_3 n, \quad r_3 \neq 0$$

коммутирует с некоторым разностным оператором L_{4g+2}.

Теорема 17

Разностный оператор

$$L_4^\flat = \Big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon^2} + U(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 V(x,\varepsilon) T_\varepsilon^{-1}\Big)^2 + W(x,\varepsilon),$$

где

$$U(x,\varepsilon) = -\frac{\nu(x,\varepsilon) + \nu(x+\varepsilon,\varepsilon)}{\gamma(x,\varepsilon) - \gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)}, \quad W(x,\varepsilon) = -c_2 - \gamma(x,\varepsilon) - \gamma(x+\varepsilon,\varepsilon),$$

$$V(x,\varepsilon) = \frac{\nu^2(x,\varepsilon) - F_1(\gamma(x,\varepsilon))}{(\gamma(x,\varepsilon) - \gamma(x-\varepsilon,\varepsilon))(\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon) - \gamma(x,\varepsilon))},$$

$\gamma(x)$, $\nu(x)$ — произвольные функциональные параметры, коммутирует с оператором

$$L_6^\flat = L_4^\flat\Big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon^2} + U(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 V(x,\varepsilon) T_\varepsilon^{-1}\Big) -$$

$$\gamma(x+2\varepsilon,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon^2} - (\nu(x,\varepsilon) + U(x,\varepsilon)\gamma(x,\varepsilon)) - \varepsilon^2 V(x,\varepsilon)\gamma(x-\varepsilon,\varepsilon) T_\varepsilon^{-1}.$$

Спектральная кривая операторов $L_4^\flat, L_6^\flat$ задается уравнением

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

Пусть

$$\gamma(x,\varepsilon) = -\frac{1}{2}(c_2 + \mathcal{W}(x)), \qquad \nu(x,\varepsilon) = \frac{\mathcal{W}_x}{2\varepsilon}.$$

Тогда имеют место разложения

$$L_4^\flat = \mathcal{L}_4 + O(\varepsilon), \qquad L_6^\flat = \mathcal{L}_6 + O(\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{L}_4 = (\partial_x^2 + \mathcal{U}(x))^2 + \mathcal{W}(x),$$

$$\mathcal{L}_6 = (\partial_x^2 + \mathcal{U})^3 + \frac{1}{2}(c_2 + 3\mathcal{W})(\partial_x^2 + \mathcal{U}) + \frac{3}{2}\mathcal{W}_x\partial_x + \frac{5}{4}\mathcal{W}_{xx},$$

$$\mathcal{U}(x) = \frac{-16F_1(-(c_2+\mathcal{W})/2) + \mathcal{W}_{xx}^2 - 2\mathcal{W}_x\mathcal{W}_{xxx}}{4\mathcal{W}_x^2}.$$

При этом спектральные кривые пар $L_4^\flat$, $L_6^\flat$ и $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{L}_6$ совпадают.

Теорема 18

Если

$$\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P)), \qquad \chi_2(n, P) = -\chi_2(n, \sigma(P)),$$

то L_4 имеет вид

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

при этом

$$\chi_1 = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}, \qquad \chi_2 = \frac{w}{Q_n},$$

где

$$Q_n(z) = z^g + \alpha_{g-1}(n) z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(n).$$

Функции V_n, W_n, Q_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = Q_{n-1}Q_{n+1}V_n + Q_n(Q_{n+2}V_{n+1} + Q_{n+1}(z - V_n - V_{n+1} - W_n)).$$

Примеры

1. $L_4 = (T + (r_3 n^3 + r_2 n^2 + r_1 n + r_0) T^{-1})^2 + g(g+1) r_3 n, \quad r_3 \neq 0$

2. $L_4 = (T + (r_1 a^n + r_0) T^{-1})^2 + r_1 (a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1) a^{n-g}, \quad r_1 \neq 0,$
$a \neq 0,\ a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1 \neq 0.$

3. $L_4 = (T + (r_1 \cos(n) + r_0) T^{-1})^2 - 4 r_1 \sin(\frac{g}{2}) \sin(\frac{g+1}{2}) \cos(n + \frac{1}{2}), \quad r_1 \neq 0.$

Выберем следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, K_n, \xi_0(n), \gamma, \alpha\},$$

где Γ Риманова поверхность рода g, $q \in \Gamma$ — фиксированная точка, k^{-1} — локальный параметр около q, $K_n \in \Gamma, n \in \mathbb{Z}$ — набор точек общего положения, $\xi_0(n) = (\xi_0^1(n), \ldots, \xi_0^{l-1}(n), 1)$, при $n > 0$, $\xi_0(n) = (1, \xi_0^2(n), \ldots, \xi_0^l(n))$, при $n < 0$, $\xi_0^j(n)$ — функции от n, для простоты предположим, что $\xi_0^j(n) \neq 0$, $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{lg}$ — дивизор ($\gamma_j \in \Gamma$ находятся в общем положении), α — набор векторов

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{lg}, \qquad \alpha_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,l-1}).$$

Пара (γ, α) называется *параметры Тюрина*, (γ, α) определяет полустабильное голоморфное расслоение над Γ с голоморфными сечениями $\eta_1, \ldots, \eta_l$. Точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}$ — являются точками линейной зависимости сечений, при этом

$$\eta_l(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_{j,i}\eta_j(\gamma_k), \qquad k = 1, \ldots, lg.$$

Теорема 19

Существует единственная векторная функция $\psi(n,P) = (\psi_1(n,P),\dots,\psi_l(n,P))$, которая удовлетворяет следующим свойствам.

1. В окрестности точки q функция $\psi(n,P)$ имеет вид

$$\psi(n,P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\xi_s(n)}{k^s}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^n,$$

$$\xi_s(n) = (\xi_s^1(n),\dots,\xi_s^l(n)).$$

2. Вектор–функция $\psi(n,P)$ имеет gl простых полюсов в $\gamma_1,\dots,\gamma_{lg}$ такой, что

$$Res_{\gamma_i}\psi_j = \alpha_{i,j} Res_{\gamma_i}\psi_l.$$

3. Пусть $n>0$ и пусть $n = lm+s$, $m\in\mathbb{N}$, $0<s\le l$, ψ имеет простой ноль в $K_1,\dots,K_m$

$$\psi(K_p) = 0, \qquad 1\le p\le m,$$

дополнительно $\psi_1,\dots,\psi_s$ имеют простые нули в K_{m+1}

Пример 7

Оператор

$$L_4 = T^4 + 2n^2T^3 + \frac{3}{2}(n-1)n(n^2-n-2)T^2 + \frac{1}{2}(n-2)n^2(n^3-4n^2-n+10)T+$$

$$\frac{1}{16}(n-3)(n-2)(n-1)n(n(n-3)-4)((n-3)n-6)$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^6 + (3n^2+6n+8)T^5 + \frac{1}{4}(n(n+1)(32+15n(n+1))-6)T^4+$$

$$\frac{1}{2}n^2(n^2-2)(5n^2+7)T^3 + \frac{1}{16}(n-2)(n-1)n(n+1)((n-1)n(15(n-1)n-38)-36)T^2+$$

$$\frac{1}{16}(n-2)^2n^2(12+(n-2)n((n-2)n-5)(3(n-2)n-11))T+$$

$$\frac{1}{64}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)((n-3)n-6)((n-4)(n-3)n(n+1)-6).$$

Спектральная кривая пары L_4, L_6 задается уравнением

$$w^2 = \frac{1}{4}z^2(32z-3)^2.$$