Квазимногообразия раскрашенных графов

Alexander Treier

21th March
Omsk Algebraic Seminar

Хроматическое число

Пусть у нас есть алгебраическая система $\mathcal{A}$ и набор цветов C.

Мы можем раскрасить элементы алгебраической системы $\mathcal{A}$ так, чтобы выполнялось некоторое правило раскраски P.

Обычно правило P запрещает ту или иную конфигурацию раскраски. Например, для графов можно использовать следующее правило:
P: "две соседние вершины в графе не могут быть окрашены в один цвет."

Хроматическое число

Пусть у нас есть алгебраическая система $\mathcal{A}$ и набор цветов C.

Мы можем раскрасить элементы алгебраической системы $\mathcal{A}$ так, чтобы выполнялось некоторое правило раскраски P.

Обычно правило P запрещает ту или иную конфигурацию раскраски. Например, для графов можно использовать следующее правило:
P: “две соседние вершины в графе не могут быть окрашены в один цвет.”

Минимальное количество цветов, которое нужно использовать, чтобы раскрасить элементы системы $\mathcal{A}$ не нарушая правила P называется хроматическим числом $\mathcal{A}$ (по правилу P) и обозначается $\chi(\mathcal{A})$.

Хроматическое число метрического пространства

Если алгебраическая система является метрическим пространством, то правило раскраски может быть таким:

P: “две точки пространства на расстоянии 1 не могут быть покрашены в один цвет.”

Хроматическое число метрического пространства

Если алгебраическая система является метрическим пространством, то правило раскраски может быть таким:

P: "две точки пространства на расстоянии 1 не могут быть покрашены в один цвет."

Нетрудно понять что $\chi(\mathbb{R}) = 2$.

Хроматическое число метрического пространства

Если алгебраическая система является метрическим пространством, то правило раскраски может быть таким:

P: “две точки пространства на расстоянии 1 не могут быть покрашены в один цвет.”

Нетрудно понять что $\chi(\mathbb{R}) = 2$.

А если $M = \{\sqrt{a} | a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}$, чему равно $\chi(M)$?

Раскраски плоскости. Hadwiger–Nelson problem.

Случай плоскости намного сложнее, чем случай прямой. Рассмотрим обычную двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой.

Точное значение $\chi(\mathbb{R}^2)$ неизвестно. Однако, простые оценки получить несложно:

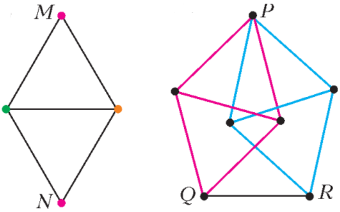
$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$$

Раскраски плоскости. Hadwiger–Nelson problem.

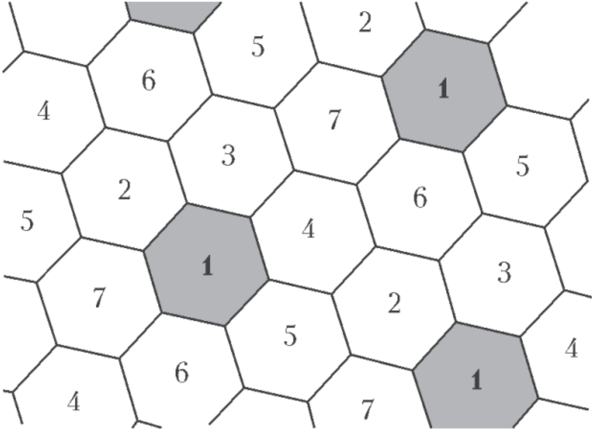
Случай плоскости намного сложнее, чем случай прямой. Рассмотрим обычную двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой.

Точное значение $\chi(\mathbb{R}^2)$ неизвестно. Однако, простые оценки получить несложно:

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$$



Замощение плоскости



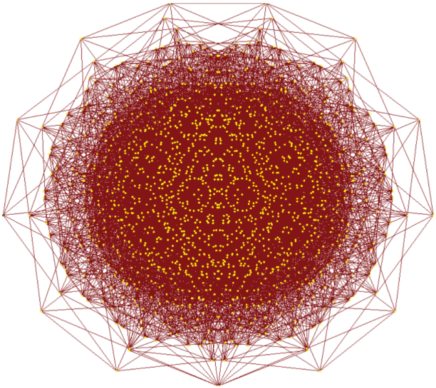
Прорыв 2018 года

A.D.N.J.de Grey. The chromatic number of the plane is at least 5. – //arXiv preprint arXiv:1804.02385 (2018)
А. Райгородский, В. Воронов, А. Савватеев, “Прорыв в задаче о раскраске плоскости”, Квант, 2018

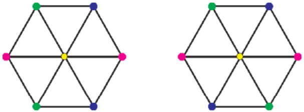
Прорыв 2018 года

A.D.N.J.de Grey. The chromatic number of the plane is at least 5. – //arXiv preprint arXiv:1804.02385 (2018)
А. Райгородский, В. Воронов, А. Савватеев, “Прорыв в задаче о раскраске плоскости”, Квант, 2018

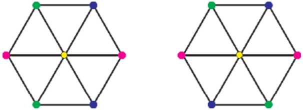
Дистанционный граф не допускающий раскраску в четре цвета:

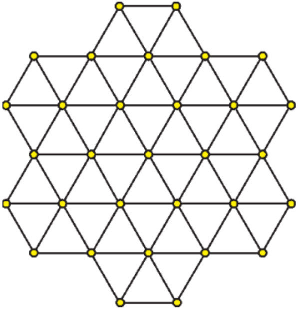


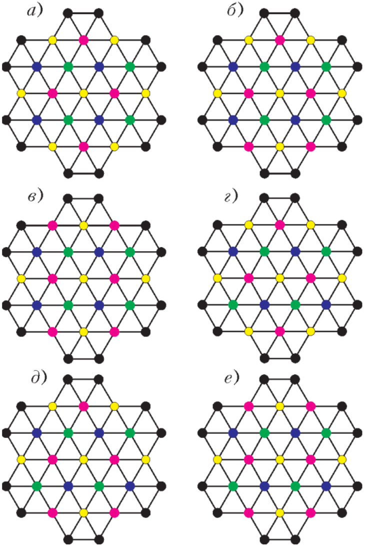
Раскраска шестиугольника не допускающая вершин одного цвета на расстоянии $\sqrt{3}$



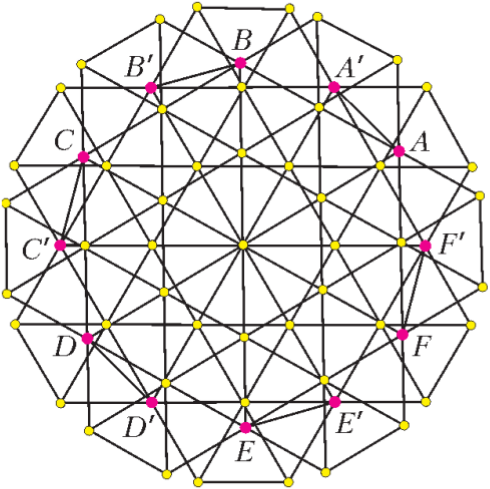
Раскраска шестиугольника не допускающая вершин одного цвета на расстоянии $\sqrt{3}$



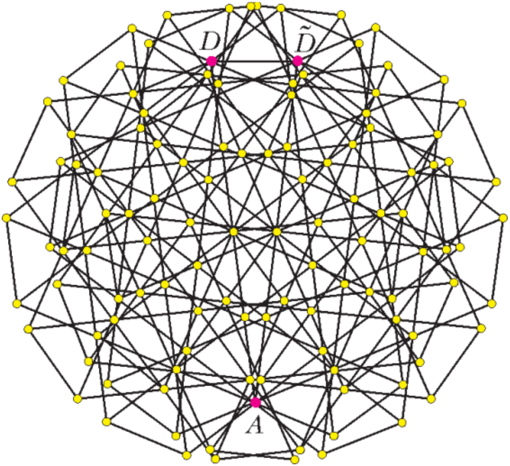



а)
б)
в)
г)
д)
е)

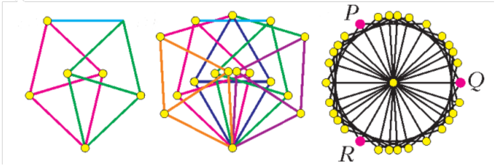
Вот это поворот!



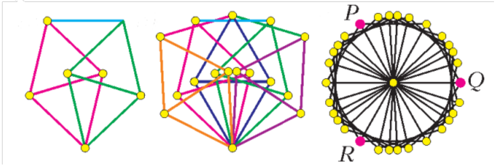
Вот новый поворот...



Используем компьютер

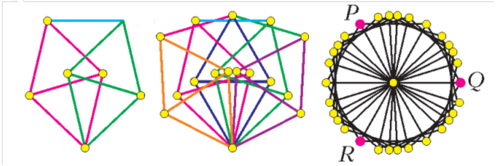


Используем компьютер



Трижды складываем круг $V+V+V$ как векторное пространство. С помощью компьютера проверяется, что полученный граф не раскрашивается в 4 цвета. В 2022 году был представлен дистанционный граф на 509 вершинах не раскрашиваемый в 4 цвета.

Используем компьютер



Трижды складываем круг $V+V+V$ как векторное пространство. С помощью компьютера проверяется, что полученный граф не раскрашивается в 4 цвета. В 2022 году был представлен дистанционный граф на 509 вершинах не раскрашиваемый в 4 цвета.

Понятного человеку объяснения как устроен граф не имеющий раскраску в 4 цвета до сих пор нет.

Другие результаты о раскрашивании плоскости

Jaan Parts, 2020

Существует замощение плоскости и правильная раскраска в шесть цветов 99.985698 процентов плоскости.

Другие результаты о раскрашивании плоскости

Jaan Parts, 2020

Существует замощение плоскости и правильная раскраска в шесть цветов 99.985698 процентов плоскости.

Результаты

- $\chi(\mathbb{Q}^2) = 2$ (Woodal 1970)
- $\chi(\mathbb{Q}^3) = 2,\ \chi(\mathbb{Q}^4) = 4$ (Benda, Perles 2000)
- $\chi(\mathbb{Q}(\sqrt{2})^2) = 2,\ \chi(\mathbb{Q}(\sqrt{3})^2) = 3$ (David A. Madore 2015)
- ...

Другие результаты о раскрашивании плоскости

Jaan Parts, 2020

Существует замощение плоскости и правильная раскраска в шесть цветов 99.985698 процентов плоскости.

Результаты

- $\chi(\mathbb{Q}^2) = 2$ (Woodal 1970)
- $\chi(\mathbb{Q}^3) = 2, \ \chi(\mathbb{Q}^4) = 4$ (Benda, Perles 2000)
- $\chi(\mathbb{Q}(\sqrt{2})^2) = 2, \ \chi(\mathbb{Q}(\sqrt{3})^2) = 3$ (David A. Madore 2015)
- ...

Открытые проблемы

- $\chi(\mathbb{Q}(\sqrt(2)))$
- $\chi(E^2)$ для любого числового поля E.

Раскраски графов

Проблема четырех красок

Планарный граф может быть раскрашен с помощью не более чем четырех цветов.

Раскраски графов

Проблема четырех красок

Планарный граф может быть раскрашен с помощью не более чем четырех цветов.

Простые графы являются квазимногообразием.

$$\forall x, y\ E(x,y) \to E(y,x)$$

Раскраски графов

Проблема четырех красок

Планарный граф может быть раскрашен с помощью не более чем четырех цветов.

Простые графы являются квазимногообразием.

$$\forall x, y\ E(x,y) \to E(y,x)$$

Класс графов обладающих раскраской в n цветов является квазимногообразием.
Добавим в сигнатуру n унарных предикатов $P_i(x),\ i = 1, \ldots, n$.

$$\forall x, y\ E(x,y) \wedge P_1(x) \to \neg P_1(y)$$

$$\forall x\ P_1(x) \to \neg P_1(y)$$

Объединяющая теорема для квазимногообразий

Theorem (Даниярова, Мясников, Ремесленников)

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}$. Тогда для любой конечно порожденной алгебраической системы C языка $\mathcal{L}$ следующие условия эквивалентны:

1. $C \in Qvar(A)$;
2. C *вкладывается в некоторую прямую степень* A;
3. C *аппроксимируется* A.

Что может служить порождающим графом A из объединящей теоремы?

Что может служить порождающим графом A из объединящей теоремы?

Можно ли использовать аппарат УАГ для метрических пространств?