

Омский Алгебраический Семинар
Заседание № 974

Сопоставление свойств
внешнепланарности и
обобщённой внешнепланарности
графов Кэли планарных полугрупп

Соломатин Д.В.

14.03.2024



ГРАФ КЭЛИ

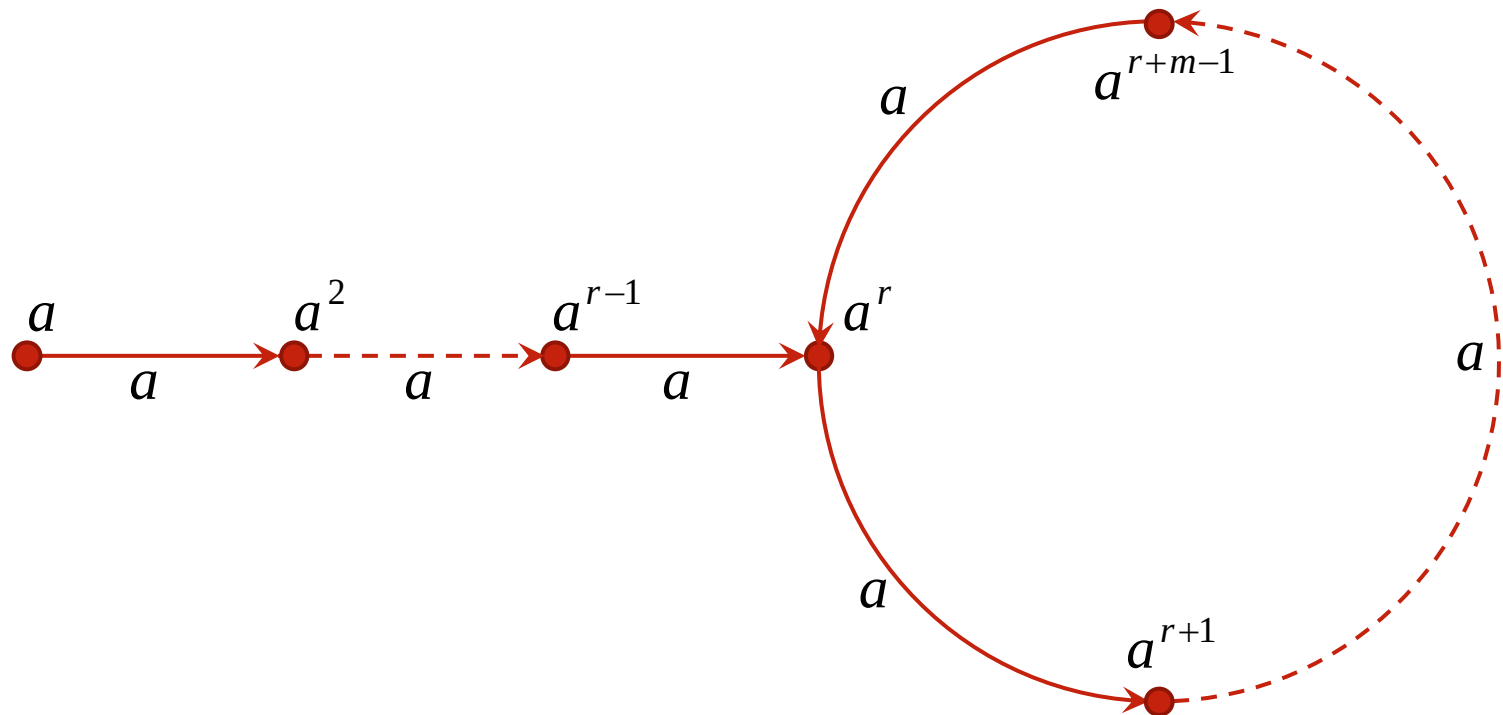
Пример:

ГРАФ КЭЛИ

Пример: $C_{r,m} = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle, r \geq 1, m \geq 0$

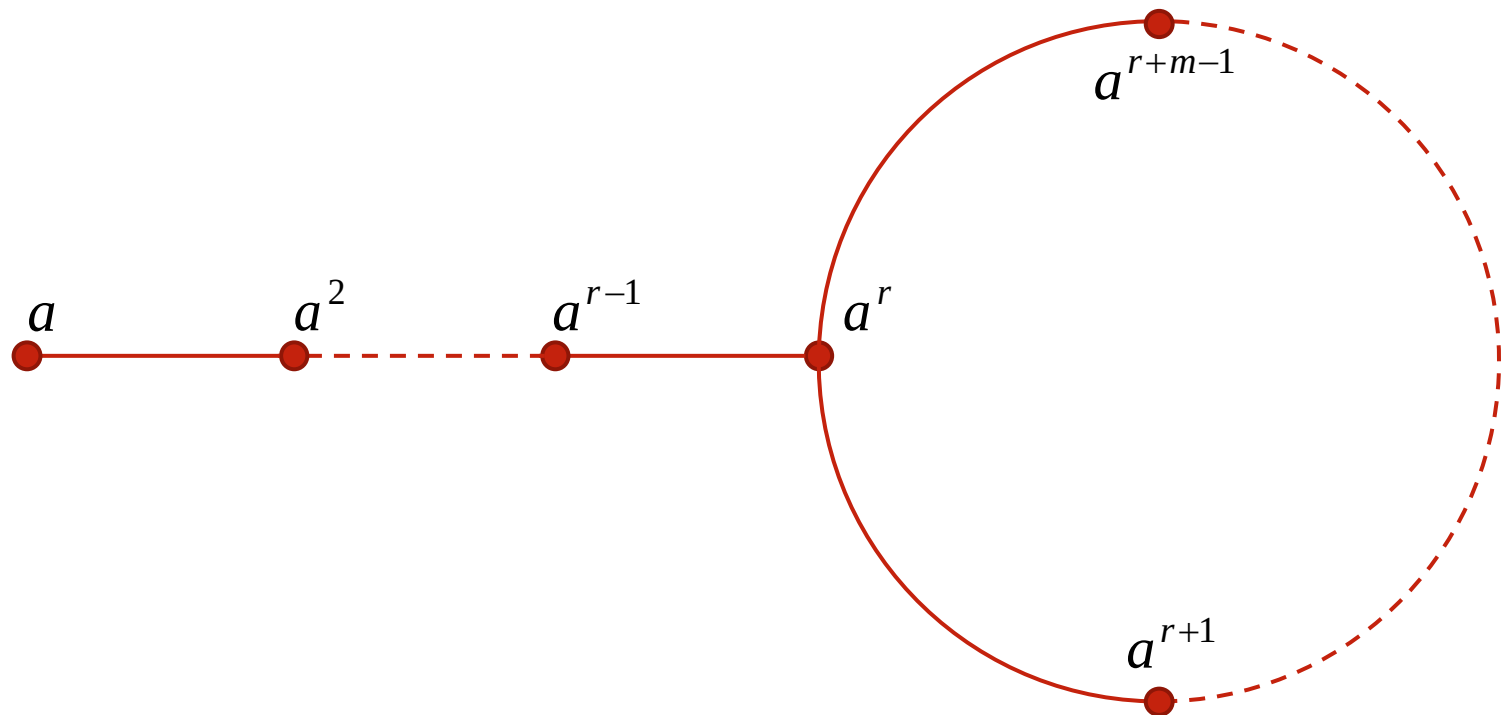
ГРАФ КЭЛИ

Пример: $C_{r,m} = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle, r \geq 1, m \geq 0$



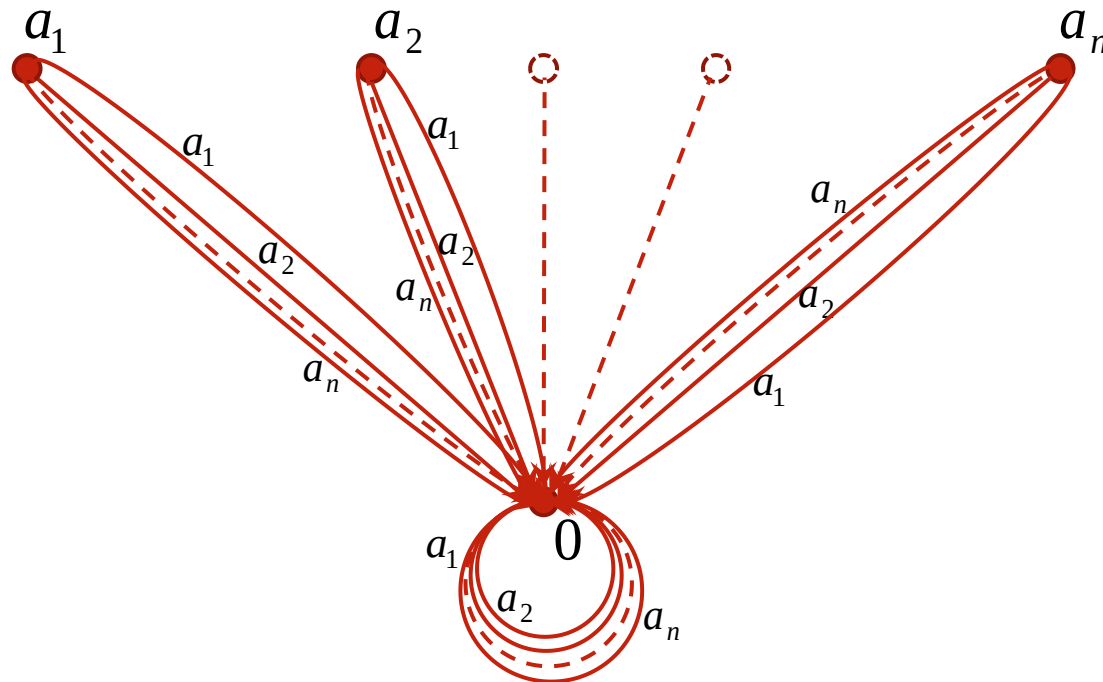
ОСНОВА ГРАФА КЭЛИ

Пример: $C_{r,m} = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle, r \geq 1, m \geq 0$



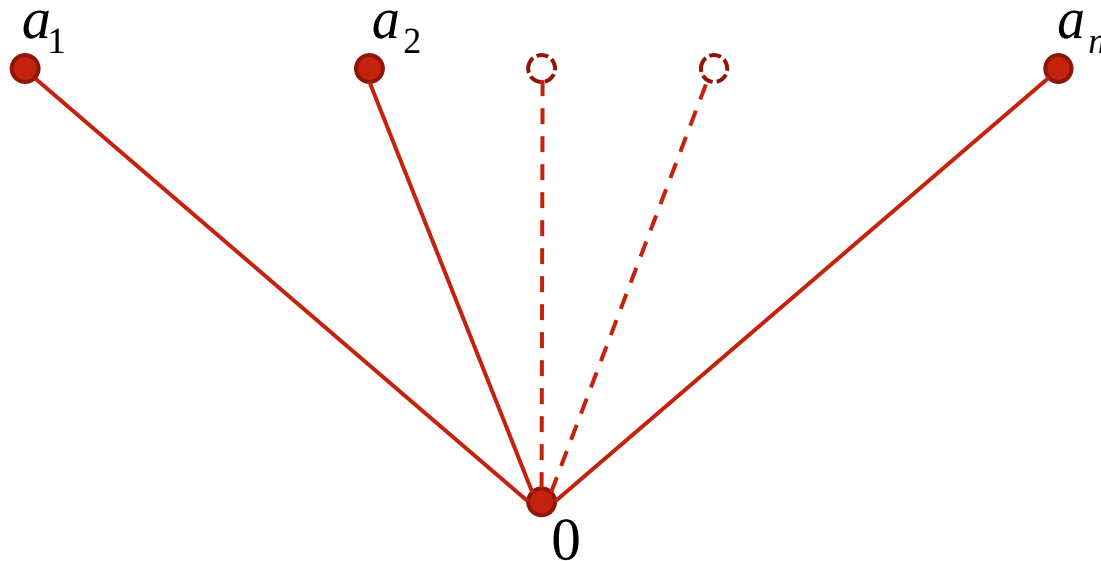
ГРАФ КЭЛИ

Пример: $Z_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid \{xy = zt \mid x, y, z, t \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\} \rangle, n \geq 1$



ОСНОВА ГРАФА КЭЛИ

Пример: $Z_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid \{xy = zt \mid x, y, z, t \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\} \rangle, n \geq 1$



ПОЧТИ НЕТ ПЛОСКИХ ГРАФОВ



ПОЧТИ НЕТ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_n|}{|G_n|} = 0$$



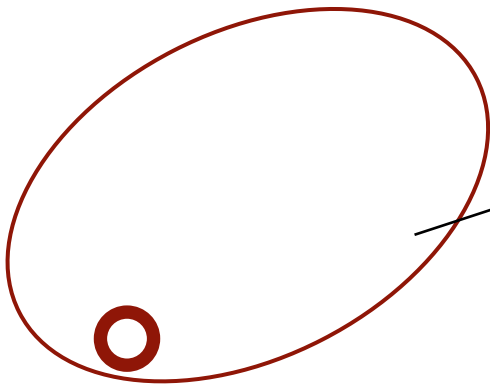
Плоские графы

ЧИСЛО СКРЕЩИВАНИЙ



Графы без
скрещиваний

ЧИСЛО СКРЕЩИВАНИЙ

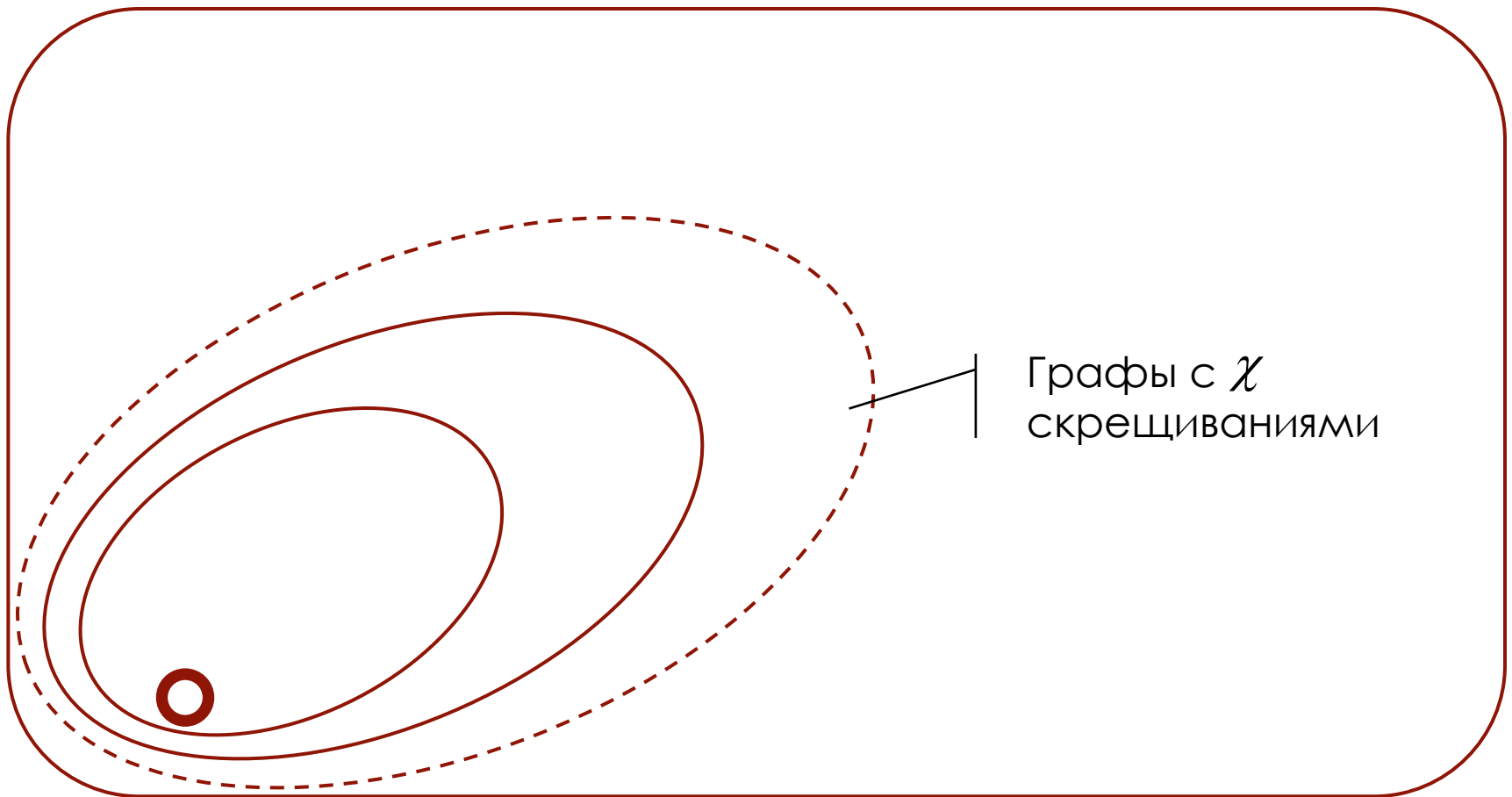


Графы с одним
скрещиванием
(тороидальные)

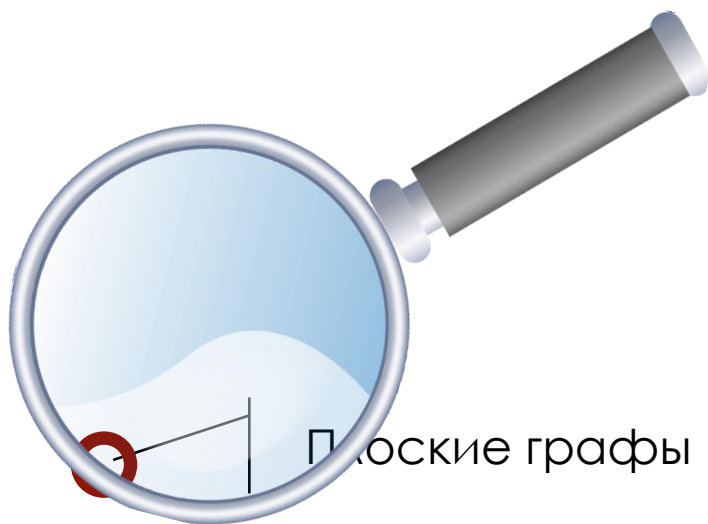
ЧИСЛО СКРЕЩИВАНИЙ



ЧИСЛО СКРЕЩИВАНИЙ

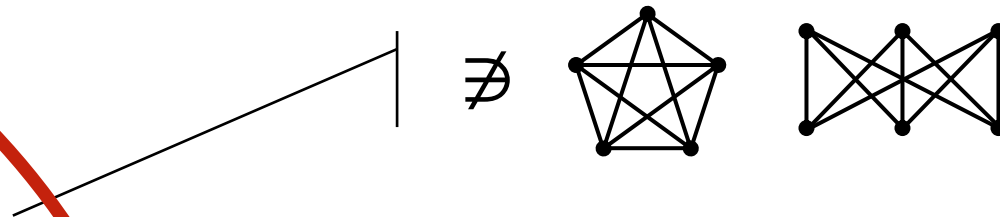


ПОЧТИ НЕТ ПЛОСКИХ ГРАФОВ



ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ





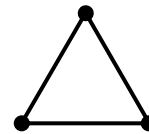
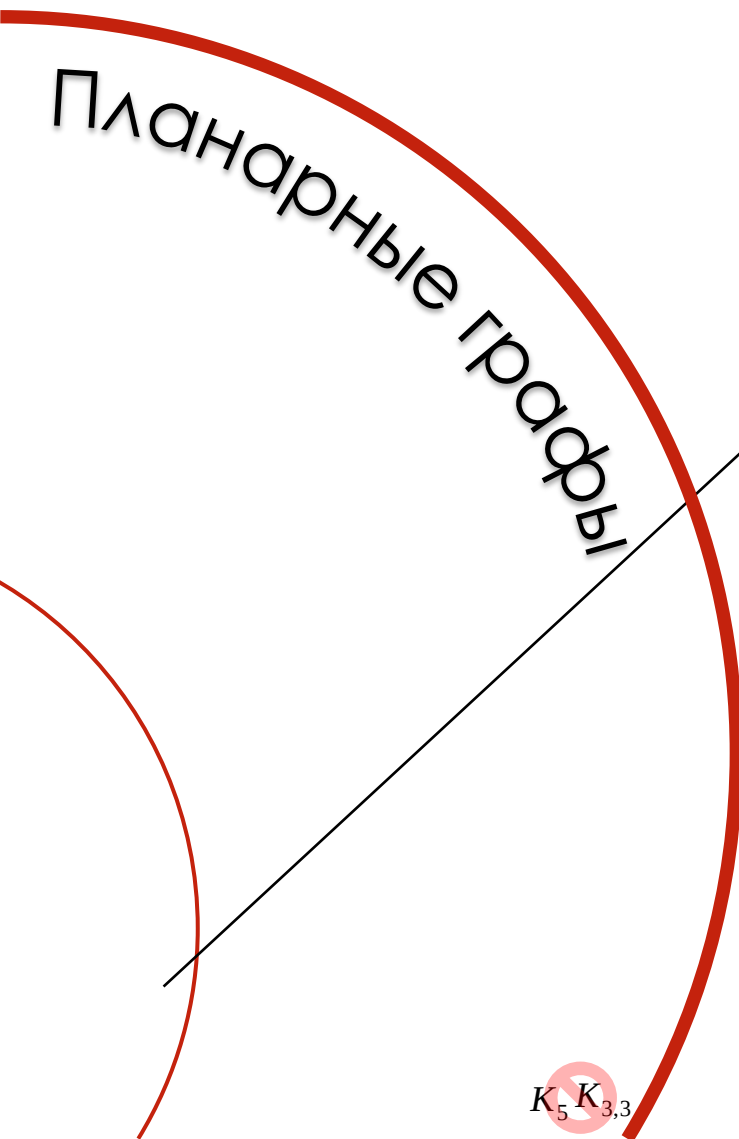
Планарные графы

ДЕРЕВЬЯ

Планарные графы

K_5 $K_{3,3}$

ДЕРЕВЬЯ



K_5 $K_{3,3}$

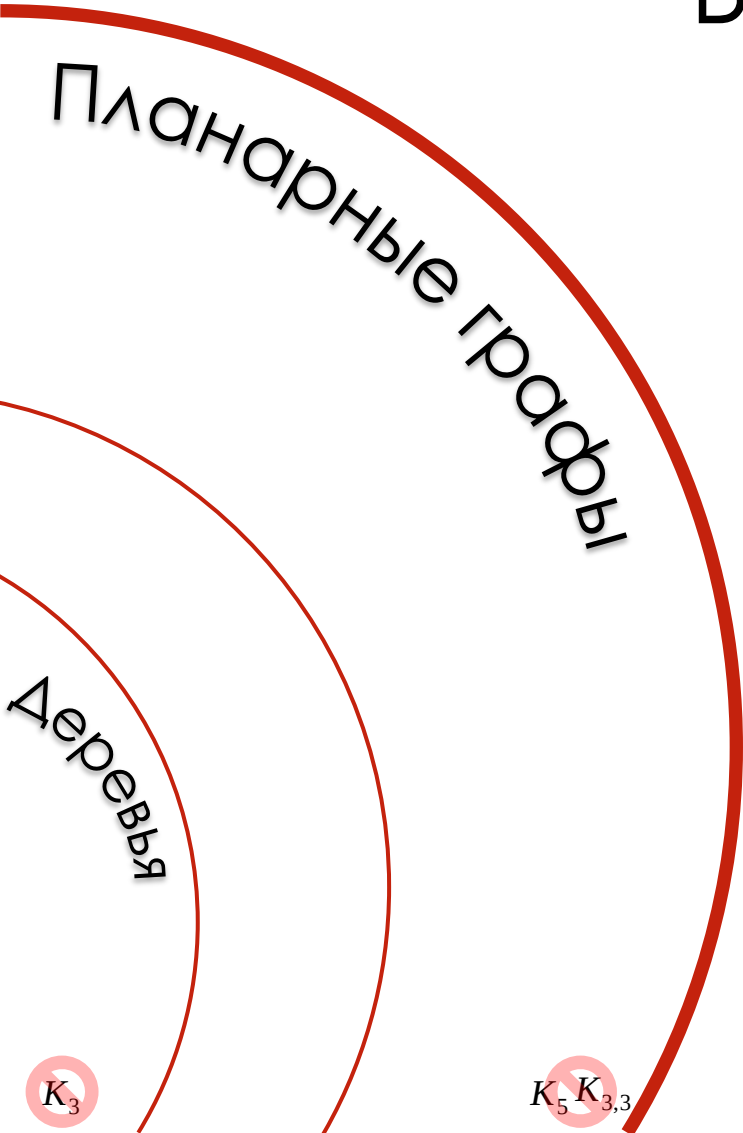
Планарные графы

Деревья

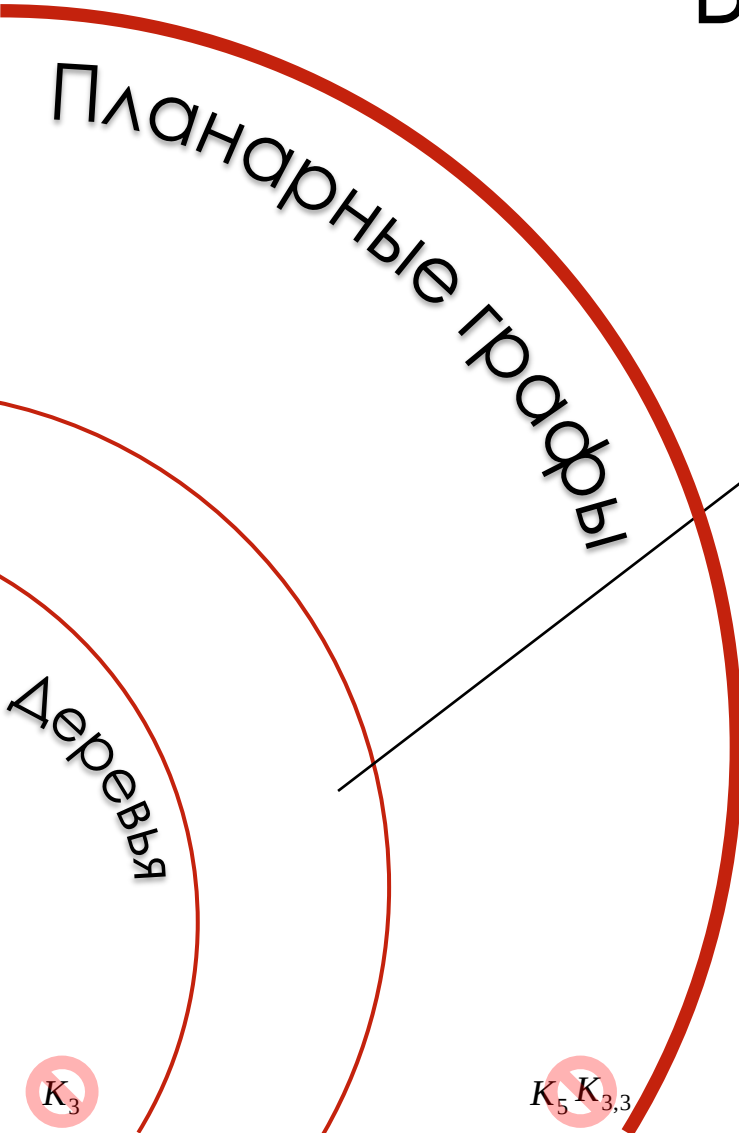
K_3

K_5 $K_{3,3}$

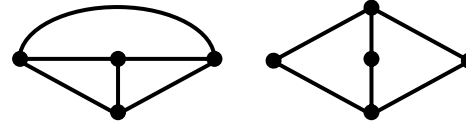
ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ



ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ



$\not\subset$



K_3

$K_5, K_{3,3}$



Планарные графы

Внешнепланарные

Деревья

K_3

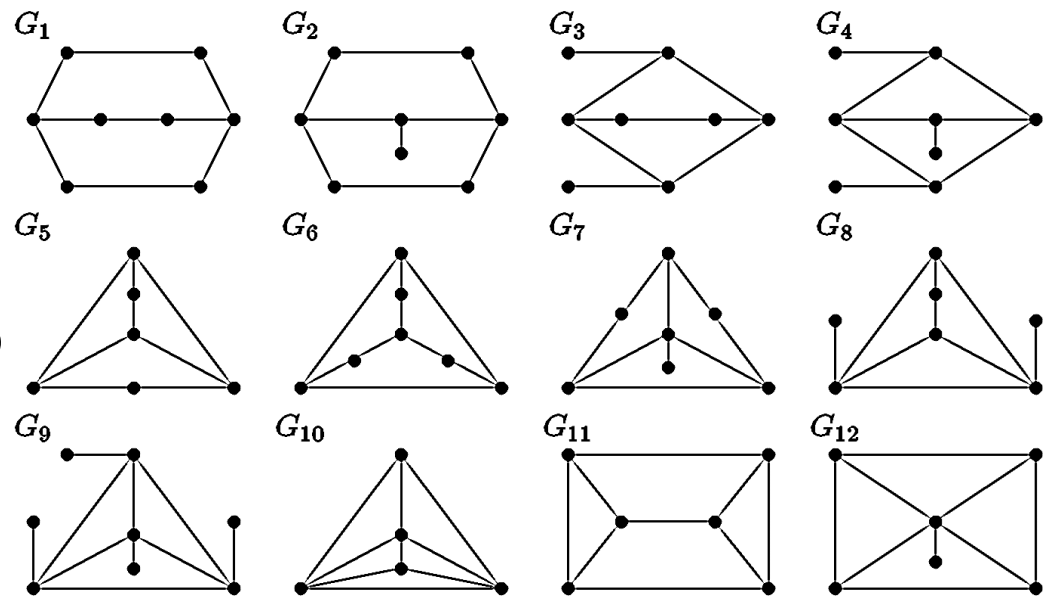
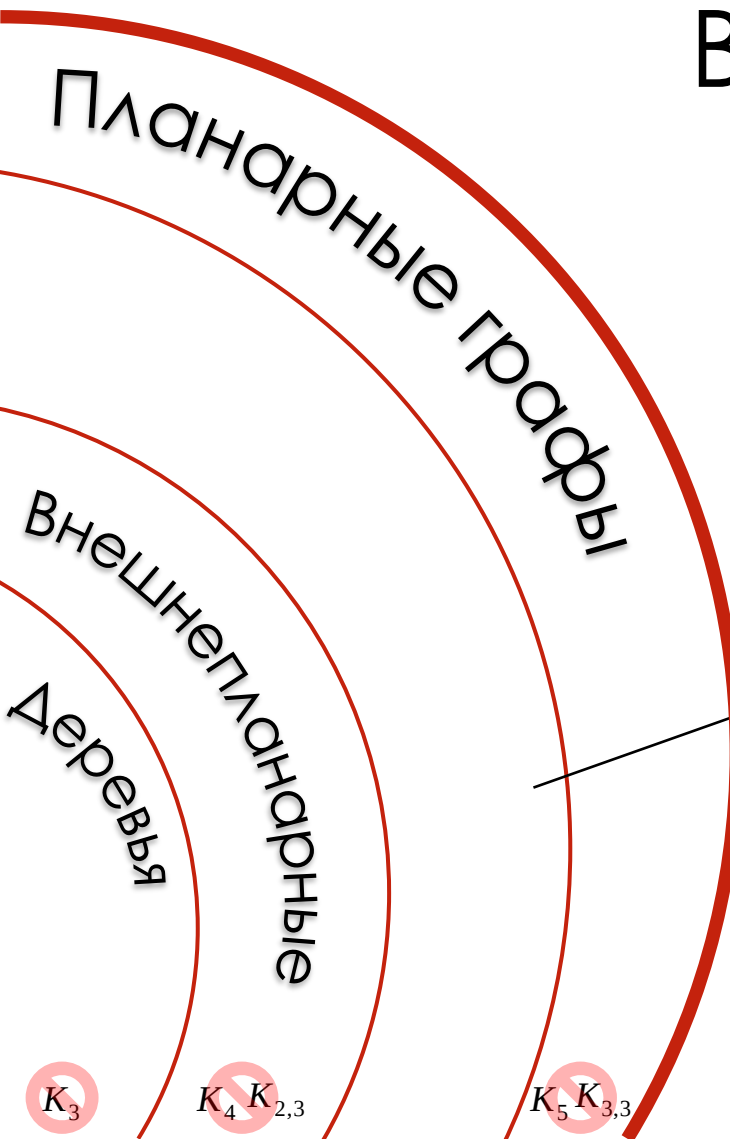
K_4 $K_{2,3}$

K_5 $K_{3,3}$

ОБОБЩЕННЫЕ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ



ОБОБЩЕННЫЕ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ



⊄

K_3

K_4 $K_{2,3}$

K_5 $K_{3,3}$

Планарные графы

Обобщенные внешнепланарные графы

Внешнепланарные

Деревья

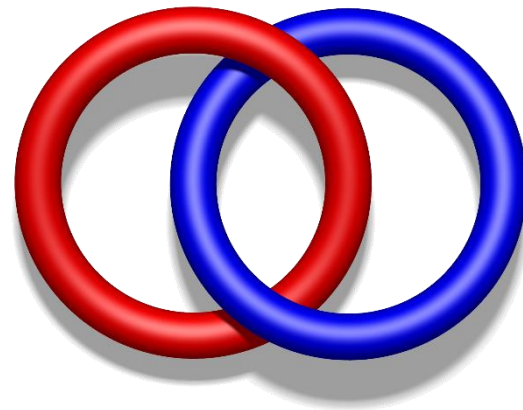
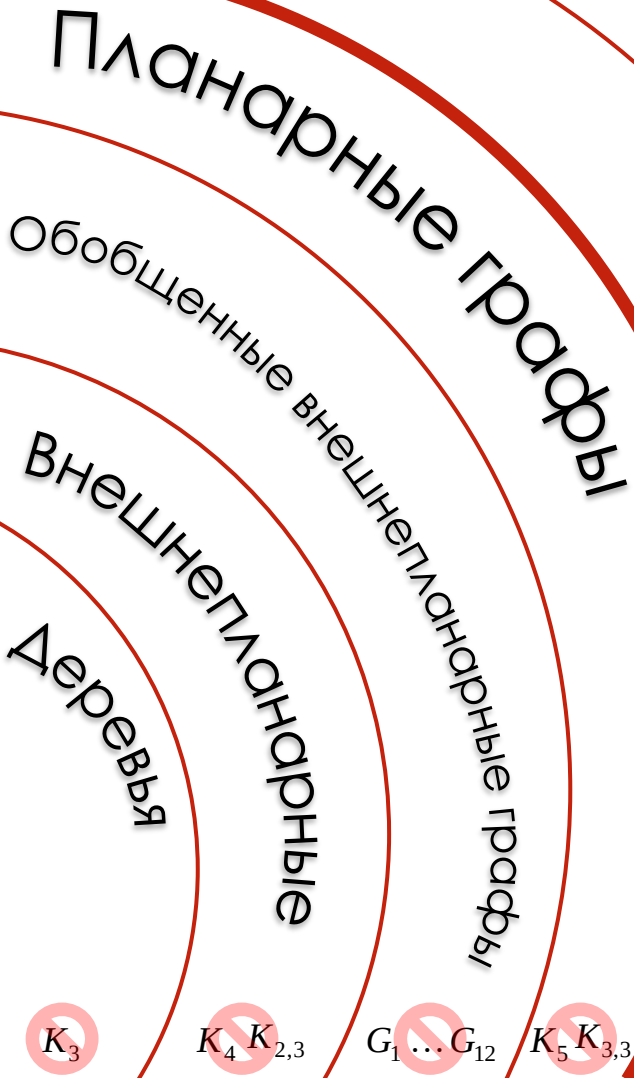
K_3

K_4 $K_{2,3}$

$G_1 \dots G_{12}$

K_5 $K_{3,3}$

НЕЗАЦЕПЛЕННОЕ ВЛОЖЕНИЕ ГРАФА



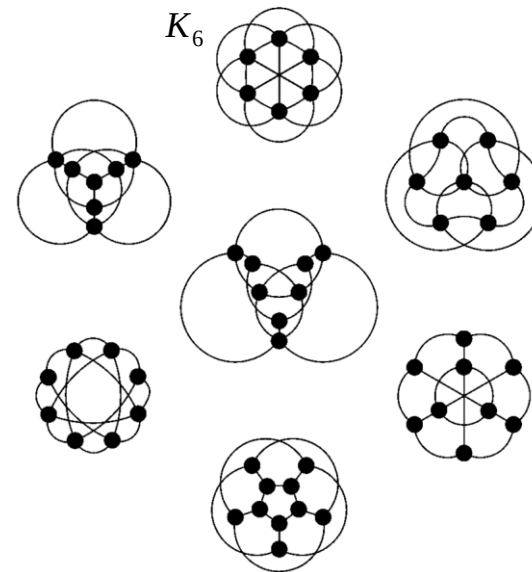
НЕЗАЦЕПЛЕННОЕ ВЛОЖЕНИЕ ГРАФА

Планарные графы

Обобщенные внешнепланарные графы

Внешнепланарные

Деревья



K_3

K_4 $K_{2,3}$

$G_1 \dots G_{12}$

K_5 $K_{3,3}$

Незацепленное вложение

Планарные графы

Обобщенные внешнепланарные графы

Внешнепланарные

Деревья

K_3

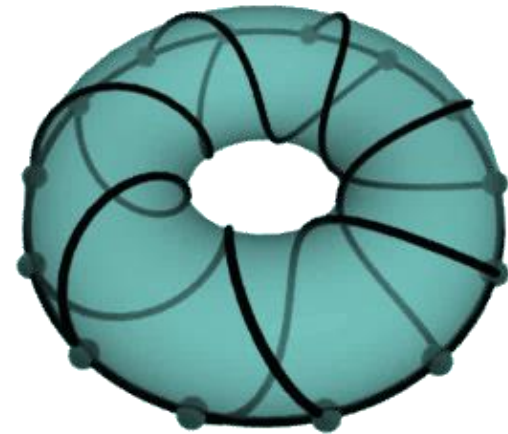
$K_4 K_{2,3}$

$G_1 \dots G_{12}$

$K_5 K_{3,3}$

$K_6 \dots$

ТОРОИДАЛЬНЫЕ ГРАФЫ



$\nexists > 16000$

запрещённых миноров

Незацепленное вложение
Планарные графы
Обобщенные внешнепланарные графы
Внешнепланарные
Деревья

K_3

K_4 $K_{2,3}$

$G_1 \dots G_{12}$

K_5 $K_{3,3}$

$K_6 \dots$

Вопрос:

КАК СООТНОСЯТСЯ СВОЙСТВА
ВНЕШНЕПЛАНАРНОСТИ И
ОБОБЩЁННОЙ
ВНЕШНЕПЛАНАРНОСТИ ГРАФОВ
КЭЛИ ПЛАНАРНЫХ ПОЛУГРУПП?



В КЛАССЕ ПРЯМЫХ
ПРОИЗВЕДЕНИЙ
ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП



Лемма. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h и t выполняется одно из ограничений:

1.1) $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) < 3$;

1.2) $r = 1, m = 2, t < 3$;

1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;

1.4) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;

1.5) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется одно из следующих ограничений:

2.1) $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2, k = 1, l = 2$;

2.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;

2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;

2.4) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где для натуральных чисел r и m выполняется одно из следующих ограничений:

3.1) $r = 1, m = 2$;

3.2) $r = 2, m < 3$;

3.3) $r = 3, m = 1$.



Теорема 1. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h и t выполняется одно из ограничений:

1.1) $r = 1, h = 1, (\text{НОД}(m, t) = 1 \text{ или } m = t = 2)$;

1.2) $r = 1, m = 2, (h < 4, t = 1 \text{ или } h = t = 2)$;

1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;

1.4) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется одно из следующих ограничений:

2.1) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;

2.2) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;

2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, при $n > 2$, где для натуральных чисел r и m выполняется одно из следующих ограничений:

3.1) $r = 1, m = 2$;

3.2) $r = 2, m < 3$;

3.3) $r = 3, m = 1$.



Теорема 2. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h и t выполняется одно из ограничений:

1.1) $r = 1, h = 1, (\text{НОД}(m, t) = 1 \text{ или } m = t = 2)$;

1.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1$;

1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t = 1$;

2) $S \cong \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, при $n > 2$.



В КЛАССЕ ПРЯМЫХ
ПРОИЗВЕДЕНИЙ
ЦИКЛИЧЕСКИХ МОНОИДОВ



Лемма. Конечный моноид S , являющийся прямым произведением неоднородных циклических моноидов, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^1 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^1$, где для натуральных r, m, h и t выполняется одно из следующих ограничений:

1.1. $r = 1, m = 2$;

1.2. $m \leq 2, t \leq 2$;

1.3. $r = 1, m > 2, t \leq 2$;

2. $S \cong \langle a \mid a^3 = a \rangle \times \langle b \mid b^3 = b \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle^i$, где i принимает указанные ниже значения, и для натуральных k, l выполняется одно из следующих ограничений:

2.1. $i = 1, l \leq 2$;

2.2. $i = +1, k = 1, l \leq 2$;

3. $S \cong \langle a \mid a^{1+m} = a^1 \rangle^{+1} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^i$, где m, h, t – натуральные числа, $i \in \{1, +1\}$ и выполняется одно из следующих ограничений:

3.1. $m = 1$;

3.2. $i = 1, h = 1, t = 2$;

3.3. $m = 2, h = 1, i = 1$;

3.4. $m = 2, h = 1, t = 2, i = +1$.

4. $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle^1 \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+1}$, где $m \leq 2, n \leq 2$; или $r = 1, m = 1, n \leq 3$.

Теорема 1. Конечный моноид S , являющийся произведением неоднородных циклических моноидов, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. $S = \langle a \mid a^3 = a \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^1$, где для натуральных h, t имеют место неравенства $h \leq 2$ и $h + t \leq 4$;
2. $S = \langle a \mid a^{1+m} = a \rangle^{+1} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^i$, где $i \in \{1, +1\}$ и для натуральных m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:
 - 2.1. $m = 1, t \leq 2$;
 - 2.2. $i = 1, m \leq 2, h = 1, t = 2$;
 - 2.3. $i = 1, m = 2, h = 1, t \leq 2$;
3. $S = \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle^1 \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+1}$, где для натуральных r, n, m выполнено $n = m = 1$ или $n - 1 = r = m = 1$ или $n = m - 1 = 1$.



Теорема 2. Конечный моноид S , являющийся произведением неоднородных циклических моноидов, допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^1 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^1$, где для натуральных h, t имеют место неравенства $h \leq 2$ и $h + t \leq 4$;
2. $S = \langle a \mid a^{1+m} = a \rangle^{+1} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^i$, где $i \in \{1, +1\}$ и для натуральных m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:
 - 2.1. $m = 1, t \leq 2$;
 - 2.2. $i = 1, m \leq 2, h = 1, t = 2$;
 - 2.3. $i = 1, m = 2, h = 1, t \leq 2$;
 - 2.4. $i = +1, m = 2, h = 1, t = 2$;
3. $S = \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle^1 \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+1}$, где для натуральных r, n, m выполнено $n = m = 1$ или $n - 1 = r = m = 1$ или $n = m - 1 = 1$.



Следствие 1. Конечный моноид S , являющийся произведением неоднородных циклических моноидов, допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли, но не допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $S = \langle a \mid a^3 = a \rangle^{+1} \times \langle b \mid b^3 = b \rangle^{+1}$.



В КЛАССЕ ПРЯМЫХ
ПРОИЗВЕДЕНИЙ
ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП
С НУЛЕМ



Лемма. Конечная полугруппа S с нулём, являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп с нулём, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^0 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^0$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:

1.1) $r=2, m=1, h<5, t=1$;

1.2) $r=3, m=1, h=3, t=1$;

1.3) $r=2, m=1, h=1, t=2$;

2) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где r – натуральное число, причем $r \leq 3$.

3.1) $S \cong \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle^{+0}$;

3.2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{+0} \times \langle b \mid b^2 = b \rangle^{+0}$, где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$;

4) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+0}$, где $n \leq 2$; или $r=1, n \leq 3$.



Теорема 1. Конечная полугруппа S с нулём, являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп с нулём, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $S \cong \langle a \mid a^3 = a^2 \rangle^0 \times \langle b \mid b^{h+1} = b^h \rangle^0$, где h – натуральное число, причем $h < 4$;
- 2) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где r и n – натуральные числа, причем $r \leq 2$; или $r = 3$, $n = 1$;
- 3) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{+0} \times \langle b \mid b^2 = b \rangle^{+0}$, где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$;
- 4) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+0}$, где $n = 1$; или $r = 1$, $n = 2$.



Теорема 2. Конечная полугруппа S с нулём, являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп с нулём, допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^0 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^0$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:

1.1) $r = 2, m = 1, h < 4, t = 1$;

1.2) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где r и n – натуральные числа, причем $r \leq 3$;

3.1) $S \cong \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle^{+0}$;

3.2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{+0} \times \langle b \mid b^2 = b \rangle^{+0}$, где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$;

4) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+0}$, где $n = 1$; или $r = 1, n = 2$.



Следствие 1. Конечная полугруппа S , являющаяся произведением неоднородных циклических полугрупп с нулём, допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли, но не допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $S \cong \langle a \mid a^4 = a^3 \rangle^0 \times \langle b \mid b^4 = b^3 \rangle^0$;
- 2) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^4 = a_0^3 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^3 = a_i^2 \rangle$, где $n > 1$;
- 3) $S \cong \langle a \mid a^3 = a^2 \rangle \times \langle b \mid b^3 = b^2 \rangle^{+0}$.



В КЛАССЕ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОЛУГРУПП



Лемма. Полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает планарный граф Кэли, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) Γ – пустой граф;
- 2) связными компонентами графа Γ являются паросочетания или изолированные вершины, а $n \leq 5$;
- 3) связными компонентами графа Γ являются цепи или изолированные вершины, а $n \leq 4$;
- 4) связными компонентами графа Γ являются «деревья» из простых циклов или изолированные вершины, а $n \leq 3$;
- 5) Γ – любой граф, а $n \leq 2$, либо $n > 2$ и $t \leq 2$.



Теорема 1. Для любого графа коммутативности Γ полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает внешнепланарный граф Кэли, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $t = 1$;
- 2) $1 \leq n \leq 2$;
- 3) $n = 3$ и $t = 2$.



Теорема 2. Полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли, тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих ограничений:

- 1) $n = 4$ и $t = 2$, а Γ – любой;
- 2) $n = 3$ и $t \geq 3$, а связные компоненты графа Γ - цепи или изолированные вершины;
- 3) Γ – любой, а $t = 1$, или $1 \leq n \leq 2$, или $(n = 3$ и $t = 2)$.



Следствие 1. Свободная частично коммутативная нильпотентная полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли, но не допускает внешнепланарный граф Кэли если и только если выполняется одно из следующих условий:

- 1) Γ – любой граф, а $n = 4$ и $t = 2$;
- 2) связными компонентами графа Γ являются цепи или изолированные вершины, а $n = 3$ и $t \geq 3$.



В КЛАССЕ ПОЛУГРУПП С
ЕДИНСТВЕННЫМ
ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ
СООТНОШЕНИЕМ



Лемма. Нециклическая полугруппа S с одним определяющим соотношением, допускающая полугрупповое тождество, имеет планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда S антиизоморфна одной из полугрупп:
 $S_1 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, $S_{2,k} = \langle a, b \mid ab = b^k \rangle$, где $k = 1, 2, \dots$,
 $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$, $S_4 = \langle a, b \mid aba = b \rangle$, $S_5 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$,
 $S_6 = \langle a, b \mid aba^2 = ba \rangle$; или изоморфна одной из полугрупп: $S_1, S_{2,1}, S_4, S_5$.

Заметим, что полугруппы $S_1, S_{2,k}$, где $k = 1, 2, \dots$, S_3, S_4, S_5 и S_6 , – это все возможные полугруппы, которым только может быть изоморфна или антиизоморфна нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением, допускающая полугрупповое тождество.



Теорема 1. Если S – это нециклическая полугруппа с единственным определяющим соотношением, допускающая полугрупповое тождество, то следующие условия эквивалентны:

- 1) Полугруппа S допускает внешнепланарный граф Кэли;
- 2) Полугруппа S допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли;
- 3) Полугруппа S антиизоморфна одной из полугрупп:
 $S_{2,k} = \langle a, b \mid ab = b^k \rangle$, где $k \leq 3$, $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$; или изоморфна полугруппе $S_{2,1} = \langle a, b \mid ab = b \rangle$.



Теорема 2. Если $S(\Gamma)$ – это частично коммутативная свободная полугруппа, соответствующая графу коммутативности Γ множества образующих её элементов, то следующие условия эквивалентны:

- 1) Полугруппа $S(\Gamma)$ допускает внешнепланарный граф Кэли;
- 2) Полугруппа $S(\Gamma)$ допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли;
- 3) Степень любой вершины в графе Γ равна нулю, то есть полугруппа $S(\Gamma)$ антикоммутативная.



В КЛАССЕ ПОЛУРЕШЕТОК (КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП ИДЕМПОТЕНТОВ)



Для полноты картины приведём еще один результат, демонстрирующий полугруппы, свойство обобщённой внешнепланарности графа Кэли которых эквивалентно свойству его планарности.

Теорема. Если $S = S_k^n$ – это n -веерная полурешетка, то следующие условия эквивалентны:

- 1) Полугруппа S допускает планарный граф Кэли;
- 2) Полугруппа S допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли;
- 3) $|S^{(2)}| \leq 3$, где $S^{(2)}$ – множество всех ненулевых слов полугруппы S вида $a_i a_j, i \neq j$.



О ДОПУСТИМОСТИ ГРАФОВ ВЗЯТЫХ С НЕКОТОРОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ И ПОМЕТКОЙ РЁБЕР В КАЧЕСТВЕ ГРАФОВ КЭЛИ ДЛЯ ПОЛУГРУПП



Теорема (о допустимости графов Понтрягина-Куратовского).

Если $\text{Cay}(S, E)$ – граф Кэли конечной полугруппы S , то $\text{Cay}(S, E)$:

1) не изоморфен полному двудольному графу $K_{3,3}$ с любой ориентацией и раскраской (разметкой) ребер;

2) изоморфен полному графу K_5 с единственной ориентацией ребер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление $S = \langle a, b \mid ab = ba, a = b^2 = a^3b, a^2 = ab^2, b = a^3 = a^2b^2 \rangle$.

Теорема (о допустимости графов Чартренда-Харари).

Если $\text{Cay}(S, E)$ – граф Кэли конечной полугруппы S , то $\text{Cay}(S, E)$:

1) не изоморфен полному графу K_4 с любой ориентацией и раскраской ребер;

2) не изоморфен полному двудольному графу $K_{2,3}$ с любой ориентацией и раскраской ребер.



Наконец, развивая идеи решения задачи о допустимости графов Понтрягина-Куратовского взятых с некоторой ориентацией и пометкой рёбер в качестве графов Кэли полугрупп и аналогично графов Чартрендом-Харари, в заключительной части рассмотрим вопрос о допустимости графов Седлачека, взятых с некоторой ориентацией и пометкой ребер, в качестве графов Кэли полугрупп.

Теорема (о допустимости графов Седлачека). Если G – граф Кэли конечной полугруппы, то G не изоморфен ни одному из графов Седлачека G_i , где $1 \leq i \leq 12$, с любой ориентацией и раскраской ребер.



Доказательство.

Число вершин n , число рёбер m графа Кэли полугруппы связано с числом образующих её элементов t равенством $nt = m$. В противном случае просто не хватит ребер, для выполнения операции умножения на каждый из образующих, либо не хватит вершин, для получения результатов такого умножения. Приведём количество вершин и рёбер графов Седлачека в таблице.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	8	8	8	8	6	7	7	7	8	5	6	6
m	9	9	9	9	8	9	9	9	10	9	9	9

Как видим, для любого $1 \leq i \leq 12$, число рёбер $m = |EG_i|$ не делится на число вершин $n = |VG_i|$. Следовательно, ни один из графов Седлачека взятый с некоторой ориентацией и пометкой рёбер не изоморфен графу Кэли какой-либо полугруппы.

Что и требовалось доказать.



**Спасибо
за
внимание!**

 Solomatin_DV
@omgpu.ru