Нетеровость по уравнениям для предикатных алгебраических систем

Бучинский И. М., buchvan@mail.ru

(совместно с Котов М. В. и Трейер А. В.)

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева

Омский алгебраический семинар,
г. Омск, 7 марта 2024 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН,
проект FWNF-2022-0003

Предварительные сведения

Язык $\mathcal{L} = \{P_1^{(n_1)}, \ldots, P_k^{(n_k)}\}$, где каждый $P_i^{(n_i)}$ – предикатный символ размерности n_i, будем называть *предикатным языком*. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебраическая система над языком $\mathcal{L}$. Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством элементов A: $\mathcal{L}_\mathcal{A} = \mathcal{L} \cup A$, будем называть предикатным языком с константами из A.

Для языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной.

Предварительные сведения

Язык $\mathcal{L} = \{P_1^{(n_1)}, \ldots, P_k^{(n_k)}\}$, где каждый $P_i^{(n_i)}$ – предикатный символ размерности n_i, будем называть *предикатным языком*. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебраическая система над языком $\mathcal{L}$. Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством элементов A: $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L} \cup A$, будем называть предикатным языком с константами из A.

Для языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, либо переменной.

Предварительные сведения

Точка $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^n$ называется *решением уравнения* $s(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ от n переменных $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \models s(\mathbf{a})$.

Точка $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^n$ называется *решением системы уравнений* $S(\mathbf{X})$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если $\mathbf{a}$ является решением каждого уравнения системы $S(\mathbf{X})$.

Предварительные сведения

Две системы уравнений $S_1(\mathbf{X})$ и $S_2(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}$ называются *эквивалентными* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если их множества решений совпадают.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного n любая система уравнений $S(\mathbf{X})$ от n переменных $\mathbf{X}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\mathbf{X}) \subseteq S(\mathbf{X})$.

Предварительные сведения

С достаточно обширным списком работ и теоретической базой по универсальной алгебраической геометрии можно ознакомиться, например, в монографии Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников «Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами» (2016, http://iitam.omsk.net.ru/~remesl/articles/monography.pdf) [1].

Предварительные сведения

Теорема 2.5.21 (объединяющая теорема для $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$). *Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система языка* $\mathtt{L}$. *Тогда для любой конечно порождённой алгебраической системы $\mathcal{C}$ языка* $\mathtt{L}$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{C}) \supseteq \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$, *то есть* $\mathcal{C} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$;

(2) $\mathrm{Th}_\exists(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{Th}_\exists(\mathcal{A})$;

(3) $\Delta_\mathcal{C} \subseteq \Delta_\mathcal{A}$, *то есть любая диаграммная формула языка* $\mathtt{L}$, *выполнимая в* $\mathcal{C}$, *выполнима в* $\mathcal{A}$;

(4) $\mathcal{C}$ *вкладывается в некоторую ультрастепень алгебраической системы* $\mathcal{A}$;

(5) $\mathcal{C}$ *изоморфна предельной алгебраической системе над* $\mathcal{A}$;

(6) $\mathcal{C}$ *является алгебраической системой, определённой полным атомарным типом теории* $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$ *языка* $\mathtt{L}$;

(7) $\mathcal{C}$ *дискриминируется алгебраической системой* $\mathcal{A}$;

(8) $\mathcal{C}$ *является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над* $\mathcal{A}$, *определённого системой уравнений языка* $\mathtt{L}$.

Предварительные сведения

Теорема 2.5.22 (объединяющая теорема для $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})$). *Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система языка* L. *Тогда для любой конечно порождённой алгебраической системы $\mathcal{C}$ языка* L *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{C} \in \mathbf{Qvar}(\mathcal{A})$, *то есть* $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{C}) \supseteq \mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$;

(2) $\mathcal{C}$ *вкладывается в некоторую фильтрованную степень алгебраической системы* $\mathcal{A}$;

(3) $\mathcal{C}$ *подпрямо вкладывается в* **конечное** *прямое произведение предельных алгебраических систем над* $\mathcal{A}$;

(4) $\mathcal{C}$ *изоморфна предельной алгебраической системе над некоторой конечной прямой степенью* $\mathcal{A}^m$;

(5) $\mathcal{C}$ *является алгебраической системой, определённой полным атомарным типом теории* $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$ *языка* L;

(6) $\mathcal{C} \in \mathbf{Pvar}(\mathcal{A})$;

(7) $\mathcal{C}$ *вкладывается в некоторую прямую степень алгебраической системы* $\mathcal{A}$;

(8) $\mathcal{C}$ *подпрямо вкладывается в прямое произведение некоторых подсистем алгебраической системы* $\mathcal{A}$;

(9) $\mathcal{C}$ *аппроксимируется алгебраической системой* $\mathcal{A}$;

(10) $\mathcal{C}$ *является координатной алгеброй некоторого алгебраического множества над* $\mathcal{A}$, *определённого системой уравнений языка* L.

Предварительные сведения

Основными преимуществами нетеровых по уравнениям алгебраических систем являются:

1. возможность изучения только конечных систем уравнений;
2. справедливость объединяющих теорем 2.5.21, 2.5.22 из [1], дающих описание (неприводимых) координатных алгебр несколькими разными способами.
3. представимость произвольного непустого алгебраического множества в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств.

Предварительные сведения

Известны следующие примеры нетеровых по уравнениям алгебраических систем:

- любое нетерово коммутативное кольцо,
- любая конечная алгебраическая система,
- любой простой локально конечный граф,
- любая гиперболическая группа без кручения (Z. Sela, 2013),
- любая жесткая группа, в частности свободная разрешимая группа (Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, 2007, 2009),
- любая конечно порожденная метабелева (или нильпотентная) алгебра Ли (Э. Ю. Даниярова, 2007).

Предварительные сведения

Примеры алгебраических систем, не являющихся нетеровыми по уравнениям:

- сплетение неабелевой группы и бесконечной группы (G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, 1997),
- минимаксные алгебраические системы (Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, 2008),
- бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы (M. Shahryari, A. Shevlyakov, 2017),
- примеры бесконечно порожденных нильпотентных групп (A. Myasnikov, V. Remeslennikov, 2000).

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Нетеровость по уравнениям для графов

Неориентированным графом называется пара множеств (V, E), где V — непустое множество вершин, E — множество неупорядоченных пар элементов из V, называемых ребрами. Простым графом называют граф без кратных ребер и петель.

Нетеровость по уравнениям для графов

Язык $\mathcal{L}_{graph} = \{E^{(2)}\}$ назовем *языком графов*. Произвольный граф можно рассматривать как алгебраическую систему над $\mathcal{L}_{graph}$. Расширение языка $\mathcal{L}_{graph}$ множеством вершин графа Γ: $\mathcal{L}_{graph,\Gamma} = \mathcal{L} \cup V(\Gamma)$, назовем языком графов с константами из Γ.

Для языка $\mathcal{L}_{graph}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $E(x, y)$;
2. $E(x, c_1)$;
3. $E(c_1, c_2)$;
4. $x = y$;
5. $x = c_1$;
6. $c_1 = c_2$.

Нетеровость по уравнениям для графов

Язык $\mathcal{L}_{graph} = \{E^{(2)}\}$ назовем *языком графов*. Произвольный граф можно рассматривать как алгебраическую систему над $\mathcal{L}_{graph}$. Расширение языка $\mathcal{L}_{graph}$ множеством вершин графа Г: $\mathcal{L}_{graph,\Gamma} = \mathcal{L} \cup V(\Gamma)$, назовем языком графов с константами из Г.

Для языка $\mathcal{L}_{graph}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $E(x, y)$;
2. $E(x, c_1)$;
3. $E(c_1, c_2)$;
4. $x = y$;
5. $x = c_1$;
6. $c_1 = c_2$.

Предварительные сведения

В статье М. В. Котова «Несколько замечаний о нётеровости по уравнениям» (2013), сформулирован следующий критерий о том, когда произвольная алгебраическая система не является нетеровой по уравнениям:

Лемма 1

Алгебраическая система $A = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ не является нётеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов $(\mathbf{a}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{a}_i \in A^n$, и последовательность уравнений $(s_i(\mathbf{X}))_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ языка $\mathcal{L}$, для которых выполнено следующее условие:

$$A \not\models s_i(\mathbf{a}_i) \text{ для всех } i \in \mathbb{N} \text{ и } A \models s_j(\mathbf{a}_i) \text{ для всех } j < i.$$

Предварительные сведения

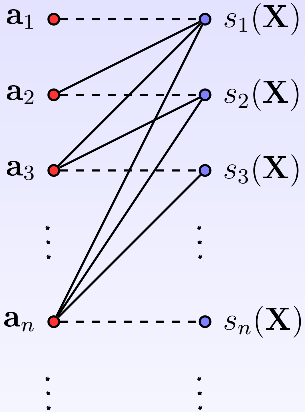


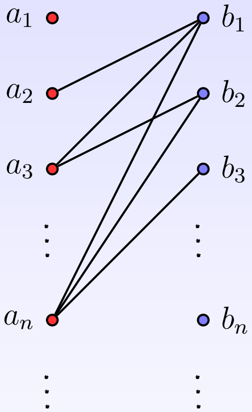
Иллюстрация к лемме 1

Нетеровость по уравнениям для графов

Определение

Граф Γ будем называть совершенно ненетеровым, если он содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ такую, что каждая из вершин a_i соединена ребрами со всеми вершинами b_j при $j < i$, но не соединена ребром с вершиной b_i.

Нетеровость по уравнениям для графов



Базисный ненетеров граф

Нетеровость по уравнениям для графов

Граф, содержащий счетную клику K в качестве индуцированного подграфа, для краткости, будем называть *надкликой*.

Теорема 1 (Б., А. В. Трейер)

Справедливы следующие утверждения:

1. простой граф ненетеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он либо совершенно ненетеров, либо является надкликой;
2. граф с петлями ненетеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он совершенно ненетеров.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Будем говорить, что свойство P графов *выразимо логикой первого порядка*, если существует набор замкнутых формул первого порядка, которые истинны для всех графов, обладающих свойством P, и только для них.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Определение того, выразимо ли какое-либо свойство логикой первого порядка, можно сводить к поиску двух элементарно эквивалентных алгебраических систем, которые различаются этим свойством. Для того, чтобы понять, являются ли они элементарно эквивалентными, можно использовать так называемую *игру Эренфойхта-Фраиссе*.

Дадим определение этой игры в контексте графов следуя М. Е. Жуковский, А. М. Райгородский «Случайные графы: модели и предельные характеристики» (2015).

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

В игре Эренфойхта-Фраиссе участвуют два игрока, называемые Новатором (**Н**) и Консерватором (**К**). Игра определяется выбранной парой графов. Графы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда **К** имеет выигрышную стратегию.

В начале игры **Н** выбирает натуральное число k. Далее они ходят по очереди, начиная с **Н**. Каждый из игроков делает k ходов, после чего определяется победитель.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

В игре Эренфойхта-Фраиссе участвуют два игрока, называемые Новатором (**H**) и Консерватором (**K**). Игра определяется выбранной парой графов. Графы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда **K** имеет выигрышную стратегию.

В начале игры **H** выбирает натуральное число k. Далее они ходят по очереди, начиная с **H**. Каждый из игроков делает k ходов, после чего определяется победитель.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

На i-м ходу **H** выбирает вершину в одном из графов и помечает ее числом i. В ответ **K** выбирает некоторую вершину из другого графа и также помечает ее числом i. После k ходов игра заканчивается. При этом в каждом графе k вершин оказываются помеченными числами от 1 до k. Обозначим эти вершины через $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (для первого графа; вершина a_i имеет пометку i) и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ (для второго).

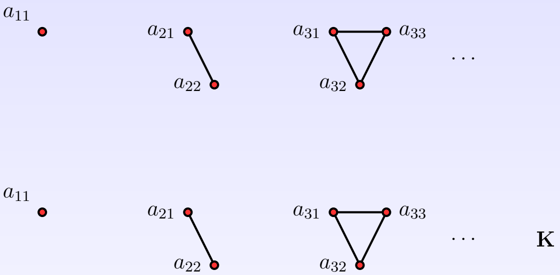
Если индуцированные подграфы на помеченных элементах первого и второго графов изоморфны, то выигрывает **H**, в противном случае — **K**.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

На i-м ходу **Н** выбирает вершину в одном из графов и помечает ее числом i. В ответ **К** выбирает некоторую вершину из другого графа и также помечает ее числом i. После k ходов игра заканчивается. При этом в каждом графе k вершин оказываются помеченными числами от 1 до k. Обозначим эти вершины через $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (для первого графа; вершина a_i имеет пометку i) и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ (для второго).

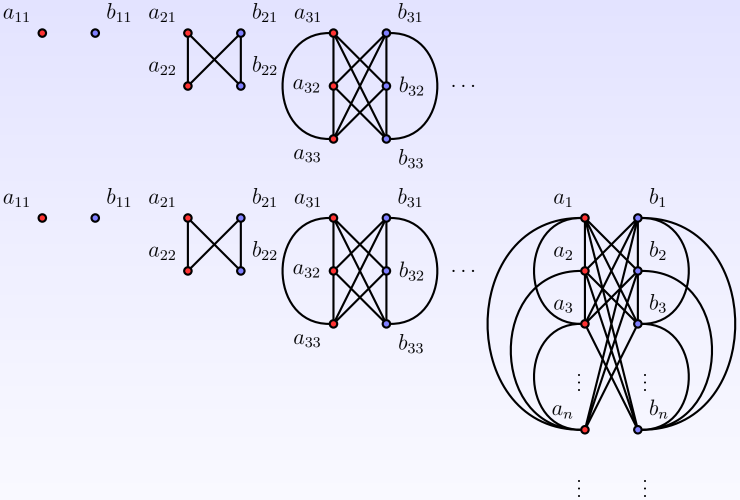
Если индуцированные подграфы на помеченных элементах первого и второго графов изоморфны, то выигрывает **Н**, в противном случае — **К**.

Выразимость нетеровости по уравнениям для простых графов



Игра Эренфойхта-Фраиссе на паре графов, построенных по кликам

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов с петлями



Игра Эренфойхта-Фраиссе на паре графов, построенных по билевым графам

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Теорема 2

Справедливы следующие утверждения:

1. свойство нетеровости по уравнениям для простых графов невыразимо логикой первого порядка (Б., А. В. Трейер);
2. свойство нетеровости по уравнениям для графов с петлями невыразимо логикой первого порядка (Б.).

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Для языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной.

Уравнения, состоящие только из констант либо всегда ложны, либо всегда истинны. Системы таких уравнений можно заменить одним заведомо ложным или истинным уравнением. Поэтому мы не будем рассматривать системы уравнений, содержащие бесконечное количество уравнений, состоящих только из констант.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Для языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной.

Уравнения, состоящие только из констант либо всегда ложны, либо всегда истинны. Системы таких уравнений можно заменить одним заведомо ложным или истинным уравнением. Поэтому мы не будем рассматривать системы уравнений, содержащие бесконечное количество уравнений, состоящих только из констант.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Замечание 1

Любая алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, P^{(1)} \rangle$ над языком с одним унарным предикатным символом нетерова по уравнениям.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Пусть $Q_1^{(n)}$ и $Q_2^{(k)}$ — предикатные символы языка $\mathcal{L}$, $X = \{x_1, \ldots, x_p\}$ — множество переменных. Кортежи $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ и $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_k)$ состоят из переменных из X и констант языка $\mathcal{L}$. Будем говорить, что два уравнения $Q_1(\overline{v})$ и $Q_2(\overline{w})$ от переменных из множества X *имеют одинаковую конфигурацию*, если выполнены следующие условия:

1. предикатные символы $Q_1^{(n)}$ и $Q_2^{(k)}$ совпадают и, следовательно, $n = k$;
2. для всех $i = 1, \ldots, n$ символы v_i и w_i обозначают одну и ту же переменную из X, либо одновременно являются константами (возможно различными).

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ — алгебраическая система над предикатным языком с конечным числом предикатных символов $\mathcal{L} = \{P_1^{(n_1)}, \ldots, P_m^{(n_m)}\}$

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Лемма 2 (БКТ)

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}_\mathcal{A} \rangle$ — алгебраическая система над предикатным языком с конечным числом предикатных символов $\mathcal{L}_\mathcal{A} = \{P_1^{(n_1)}, \dots, P_m^{(n_m)}\}$ и константами из A, не являющаяся нетеровой по уравнениям. Тогда существуют такие бесконечные последовательности элементов $\{(a_1^i, \dots, a_p^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ и уравнений S, для которых выполнены условия *леммы 1*, причем все уравнения из S имеют одинаковую конфигурацию.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Исходя из результатов *леммы 2* всюду далее без ограничения общности мы будем рассматривать только уравнения вида $P(x_1, \ldots, x_p, b_1, \ldots, b_t)$, где $P^{(n)}$ — предикатный символ языка $\mathcal{L}$, $p + t = n$, $x_1, \ldots, x_p$ — переменные, $b_1, \ldots, b_t$ — константы языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Лемма 3 (БКТ)

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}_\mathcal{A} \rangle$ над предикатным языком $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ с константами из A не является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда существует такое предикатное обеднение языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ до $\mathcal{L}'_\mathcal{A}$ с одним предикатным симоволом и константами из A, что алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, \mathcal{L}'_\mathcal{A} \rangle$ не является нетеровой по уравнениям.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

$$\begin{cases} P(x_1,\dots,x_p,b_1^1,\dots b_t^1) \\ P(x_1,\dots,x_p,b_1^2,\dots b_t^2) \\ \vdots \\ P(x_1,\dots,x_p,b_1^n,\dots b_t^n) \\ \vdots \end{cases}$$

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

$$
\begin{gathered}
(a_1^1, \ldots, a_p^1, b_1^1, \ldots b_t^1) \\
(a_1^2, \ldots, a_p^2, b_1^2, \ldots b_t^2) \\
\vdots \\
(a_1^n, \ldots, a_p^n, b_1^n, \ldots b_t^n) \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Проекция предиката

Определение

Пусть $P^{(n)}$ – произвольный n-местный предикат, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots n\}$, $0 < k < n$ и $J = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n-k}\}$. Предикат $P'^{(k)}$ будем называть *проекцией предиката P на множество компонент I с помощью элементов* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-k}$, если для любых $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$

$$\mathcal{A} \models P'(a_1, \ldots, a_k) \iff \mathcal{A} \models P(c_1, \ldots, c_n),$$

где $c_{i_j} = a_j$, если $i_j \in I$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и $c_{l_j} = p_j$, если $l_j \in J$, для любых $j = 1, 2, n-k$.

Проекция предиката

Пример 1

Пусть $\Gamma = \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E^{(3)} \rangle$ — гиперграф на 5 вершинах, в котором 3-гиперребрами являются тройки $(v_1, v_1, v_2), (v_1, v_3, v_3), (v_2, v_4, v_1), (v_3, v_2, v_2), (v_5, v_4, v_5)$ и только они.

Тогда, например, проекцией предиката E на множество компонент $I = \{1, 3\}$ с помощью элемента v_4 является бинарный предикат, истинный на парах $(v_2, v_1), (v_5, v_5)$ и только на них.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

$$
\begin{gathered}
(\tilde{a}_1^1, \ldots, \tilde{a}_{\tilde{p}}^1, \tilde{b}_1^1, \ldots \tilde{b}_{\tilde{t}}^1) \\
(\tilde{a}_1^2, \ldots, \tilde{a}_{\tilde{p}}^2, \tilde{b}_1^2, \ldots \tilde{b}_{\tilde{t}}^2) \\
\vdots \\
(\tilde{a}_1^n, \ldots, \tilde{a}_{\tilde{p}}^n, \tilde{b}_1^n, \ldots \tilde{b}_{\tilde{t}}^n) \\
\vdots
\end{gathered}
$$

где для любого $j = \overline{1, \tilde{p}}$: $\{\tilde{a}_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность попарно различных элементов,
и для любого $j = \overline{1, \tilde{t}}$: $\{\tilde{b}_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность попарно различных элементов.

Склейка предиката по разбиению

Определение

Пусть $P^{(n)}$ — произвольный n-местный предикат, $I = \bigsqcup_{j=1}^{m} I_j$ — точное разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$. Предикат ${}^{P}/{}_{I}^{(m)}$, $m \leq n$, назовем *склейкой предиката* P *по разбиению* I, если выполнено следующее условие:

$$\mathcal{A} \models {}^{P}/{}_{I}(a_1, \ldots, a_m) \iff \mathcal{A} \models P(b_1, \ldots, b_n),$$

где $b_i = a_k$, если и только если i принадлежит I_k из разбиения I.

Склейка предиката по разбиению

Пример 2

Пусть $\Gamma = \langle \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E^{(3)} \rangle$ — гиперграф на 5 вершинах, в котором 3-гиперребрами являются тройки $(v_1, v_1, v_2), (v_1, v_3, v_3), (v_2, v_4, v_1), (v_3, v_2, v_2), (v_5, v_4, v_5)$ и только они.

Пусть $I = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ — точное разбиение множества $\{1, 2, 3\}$. Тогда ${}^{E}/_{I}$ представляет собой бинарный предикат, истинный на парах $(v_1, v_3), (v_3, v_2)$ и только на них.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

$$(\tilde{\tilde{a}}^1_1, \ldots, \tilde{\tilde{a}}^1_{\tilde{\tilde{p}}}, \tilde{\tilde{b}}^1_1, \ldots \tilde{\tilde{b}}^1_{\tilde{\tilde{t}}})$$
$$(\tilde{\tilde{a}}^2_1, \ldots, \tilde{\tilde{a}}^2_{\tilde{\tilde{p}}}, \tilde{\tilde{b}}^2_1, \ldots \tilde{\tilde{b}}^2_{\tilde{\tilde{t}}})$$
$$\vdots$$
$$(\tilde{\tilde{a}}^n_1, \ldots, \tilde{\tilde{a}}^n_{\tilde{\tilde{p}}}, \tilde{\tilde{b}}^n_1, \ldots \tilde{\tilde{b}}^n_{\tilde{\tilde{t}}})$$
$$\vdots$$

где абсолютно все элементы попарно различны.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Определение

Будем говорить, что алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, P^{(2)} \rangle$ *содержит ненетерову клику*, если существует такая последовательность элементов $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq A$, что $\mathcal{A} \not\models P(a_i, a_i)$ для всех i и $\mathcal{A} \models P(a_i, a_j)$ для всех $j < i$.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Определение

Пусть P — n-местный предикатный символ языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. Будем говорить, что алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \rangle$ содержит *P-совершенно ненетерову подсистему*, если существуют такие последовательности элементов $\{(a_1^i, \ldots, a_p^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и уравнений $\{P(x_1, \ldots, x_p, b_1^i, \ldots, b_t^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, причем $a_1^1, \ldots, a_p^1, b_1^1, \ldots b_t^1, \ldots, a_1^n, \ldots, a_p^n, b_1^n, \ldots, b_t^n, \ldots$ попарно различны и $p + t = n$, что

$$\text{для всех } i \ \mathcal{A} \not\models P(a_1^i, \ldots, a_p^i, b_1^i, \ldots, b_t^i) \text{ и}$$

$$\mathcal{A} \models P(a_1^i, \ldots, a_p^i, b_1^j, \ldots, b_t^j) \text{ для всех } j < i.$$

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Теорема 3 (Б., Котов, Трейер)

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}_\mathcal{A} \rangle$ над предикатным языком $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ с константами из A не является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда для некоторого предикатного символа $P^{(n)}$ языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ существуют такая проекция $P'^{(k)}$ предиката $P^{(n)}$ и такое точное разбиение I множества $\{1, \ldots, k\}$, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- $|I| > 1$ и алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, {}^{P'}/_{I} \rangle$ содержит совершенно ненетерову подсистему;
- $|I| = 1$ и алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, Q \rangle$, где $Q = {}^{P'}/_{\{\{1\},\{2,\ldots,k\}\}}$ — бинарный предикат, содержит ненетерову клику.

Выразимость нетеровости для произвольных предикатных алгебраических систем

Следствие 1

Свойство нетеровости по уравнениям невыразимо никаким предикатным языком, содержащим хотя бы один не унарный предикатный символ, логики первого порядка.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Нетрудно заметить, что всякую алгебраическую систему над языком с одним предикатным символом $P^{(n)}$ можно рассматривать как гиперграф (или, в случае $n = 2$, как граф), в котором множеством ребер является в точности предикат $P^{(n)}$. При этом алгебраическую систему над произвольным предикатным языком бывает удобно иллюстрировать в виде гиперграфа, в котором ребра раскрашены в цвет, соответствующий некоторому предикату из языка и только ему.

Частичные порядки

Частично упорядоченным множеством (или частичным порядком) называется алгебраическая система $\mathcal{P} = \langle P, \preceq^{(2)} \rangle$, где $\preceq^{(2)}$ – бинарное отношение порядка, удовлетворяющее следующим 3 аксиомам:

1. $\forall p \in P \;\; p \preceq p$,
2. $\forall p_1, p_2 \in P \;\; p_1 \preceq p_2 \wedge p_2 \preceq p_1 \rightarrow p_1 = p_2$,
3. $\forall p_1, p_2, p_3 \in P \;\; p_1 \preceq p_2 \wedge p_2 \preceq p_3 \rightarrow p_1 \preceq p_3$.

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

Пусть A – некоторое подмножество частичного порядка $\mathcal{P}$ и пусть $A^{\uparrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A \; a \preceq x\}$ и $A^{\downarrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A \; x \preceq a\}$.
Верхним базовым конусом A называется пара $(A, A^{\uparrow})$.

Верхний базовый конус A называется *конечно порожденным*, если существует такое конечное подмножество $B \subseteq A$, что $B^{\uparrow} = A^{\uparrow}$. В противном случае, если не существует такого конечного подмножества, будем говорить, что верхний базовый конус A *бесконечно порожден.*

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

Пусть A – некоторое подмножество частичного порядка $\mathcal{P}$ и пусть $A^{\uparrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A\ a \preceq x\}$ и $A^{\downarrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A\ x \preceq a\}$.
Верхним базовым конусом A называется пара $(A, A^{\uparrow})$.

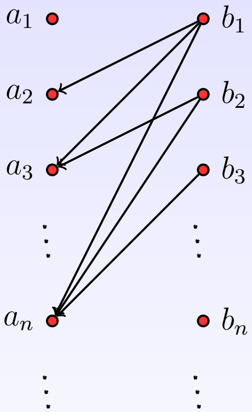
Верхний базовый конус A называется *конечно порожденным*, если существует такое конечное подмножество $B \subseteq A$, что $B^{\uparrow} = A^{\uparrow}$. В противном случае, если не существует такого конечного подмножества, будем говорить, что верхний базовый конус A *бесконечно порожден.*

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

Теорема 4 (А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык)

Частичный порядок $\mathcal{P}$ нетеров по уравнениям тогда и только тогда, когда верхний и нижний конусы любого его подмножества конечно порождены.

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков



Пример $\preceq$-совершенно ненетеровой подсистемы; дуга из b_i в a_j означает, что $a_j \preceq b_i$

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

Предложение 1 (БКТ)

Пусть $\mathcal{P} = \langle P, \preceq \rangle$ частично упорядоченное множество. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. частичный порядок P ненетеров по уравнениям;
2. $\mathcal{P}$ содержит $\preceq$-совершенно ненетерову подсистему;
3. существует такое подмножество B из $\mathcal{P}$, что верхний, или нижний, базовый конус B является бесконечно порожденным.

Нетеровость по уравнениям для строгих частичных порядков

Предложение 2 (БКТ)

Пусть $\mathcal{P} = \langle P, \prec \rangle$ строгое частично упорядоченное множество. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

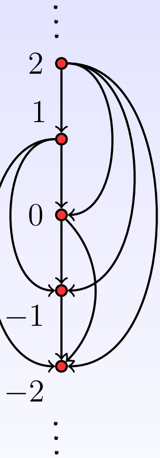
1. частичный порядок P ненетеров по уравнениям;
2. $\mathcal{P}$ содержит $\prec$-совершенно ненетерову подсистему или ненетерову клику;
3. существует такое подмножество B из $\mathcal{P}$, что верхний, или нижний, базовый конус B является бесконечно порожденным.

Нетеровость по уравнениям для строгих частичных порядков

Пример 3

Рассмотрим строгий частичный порядок $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \prec \rangle$ с естественным порядком на целых числах. Обратим внимание, что подмножество натуральных чисел $\{i\}_{i \in \mathbb{N}}$ служит последовательностью элементов, образующей ненетерову клику. Последовательности элементов $\{-2 \cdot i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и уравнений $\{x \prec -2 \cdot i - 1\}_{i \in \mathbb{N}}$ задают совершенно ненетерову подсистему в $\mathcal{Z}$.

Нетеровость по уравнениям для строгих частичных порядков



Частичный порядок $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \prec \rangle$

Спасибо за внимание!

Вопросы?