О сложности проблемы равенства в полугруппах с условием однородности определяющих соотношений

Александр Рыбалов

Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН, Омск

22 февраля, 2024

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – порождающие, $R = \{v_1 = u_1, \dots, v_k = u_k\}$ – определяющие соотношения, $S = \langle X \mid R \rangle$ – полугруппа.

Проблема равенства в S

- Вход: (w_1, w_2) – слова над X.
- Определить, равны ли w_1 и w_2 в S, то есть можно ли w_2 получить из w_1 за конечное число замен подслов согласно определяющим соотношениям.

Проблема равенства в полугруппах: разрешимость и неразрешимость

Теорема (А.А.Марков, Э.Пост, 1947)

Существует конечно определенная полугруппа с неразрешимой проблемой равенства.

Проблема равенства в полугруппах: разрешимость и неразрешимость

Теорема (А.А.Марков, Э.Пост, 1947)

Существует конечно определенная полугруппа с неразрешимой проблемой равенства.

Теорема (А.И.Мальцев, 1958)

Проблема равенства разрешима в любой конечно определенной коммутативной полугруппе.

Проблема равенства в полугруппах: сложность вычислений

Теорема (Е. Кардоза, 1975)

Проблема равенства разрешима за линейное время в любой конечно определенной коммутативной полугруппе.

Проблема равенства в полугруппах: сложность вычислений

Теорема (Е. Кардоза, 1975)

Проблема равенства разрешима за линейное время в любой конечно определенной коммутативной полугруппе.

Теорема (Е. Майр, А. Мейер, 1982)

Проблема равенства в многообразии всех коммутативных полугрупп **EXPSPACE**-полна.

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

Определение

Полугруппа с условием однорородности определяющих соотношений – полугруппа в которой для любого определяющего соотношения $v = u$ имеет место $|v| = |u|$.

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

Определение

Полугруппа с условием однорородности определяющих соотношений – полугруппа в которой для любого определяющего соотношения $v = u$ имеет место $|v| = |u|$.

Пример

Моноид трассировки (trace monoid) – моноид с конесным числом порождающих, некоторые из которых могут коммутировать. То есть определяющие соотношения имеют вид $ab = ba$ для некоторых порождающих a, b. В любом таком моноиде проблема равенства разрешима за линейное время.

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

С. И. Адян, В. Г. Дурнев. *Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп.* Успехи математических наук, 2000, Т. 55, № 2, С. 3–94.

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

С. И. Адян, В. Г. Дурнев. *Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп.* Успехи математических наук, 2000, Т. 55, № 2, С. 3–94.

Утверждение

Проблема равенства разрешима в любой конечно определенной полугруппе с условием однородности определяющих соотношений.

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

С. И. Адян, В. Г. Дурнев. *Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп.* Успехи математических наук, 2000, Т. 55, № 2, С. 3–94.

Утверждение

Проблема равенства разрешима в любой конечно определенной полугруппе с условием однородности определяющих соотношений.

Идея: для слова w обозначим $C(w)$ – все слова, которые можно получить из w за одну замену подслова. $S_0 = \{w_1\}$, $S_i = \{C(w) : w \in S_{i-1}\}$, $i > 0$.

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_k = S_{k+1}.$$

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

Вопрос 1

Какова сложность проблемы равенства в конечно определенных полугруппах с условием однородности определяющих соотношений?

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

Вопрос 1

Какова сложность проблемы равенства в конечно определенных полугруппах с условием однородности определяющих соотношений?

Вопрос 2 (верхняя оценка)

В какой класс сложности попадают все проблемы равенства в конечно определенных полугруппах с условием однородности определяющих соотношений?

Полугруппы с условием однородности определяющих соотношений

Вопрос 1

Какова сложность проблемы равенства в конечно определенных полугруппах с условием однородности определяющих соотношений?

Вопрос 2 (верхняя оценка)

В какой класс сложности попадают все проблемы равенства в конечно определенных полугруппах с условием однородности определяющих соотношений?

Вопрос 3 (нижняя оценка)

Существует ли конечно определенная полугруппа с условием однородности определяющих соотношений, в которой проблема равенства полна в этом классе сложности относительно полиномиальной сводимости?

Класс PSPACE

Пусть M – машина Тьюринга, $s_M(x)$ – число ячеек ленты, используемое в работе M на x.

Определение

Проблема распознавания (множество) S принадлежит классу **PSPACE**, если существует машина Тьюринга M, распознающая S, и полином $p(n)$ такие, что $s_M(x) < p(|x|)$.

Класс PSPACE

Пусть M – машина Тьюринга, $s_M(x)$ – число ячеек ленты, используемое в работе M на x.

Определение

Проблема распознавания (множество) S принадлежит классу **PSPACE**, если существует машина Тьюринга M, распознающая S, и полином $p(n)$ такие, что $s_M(x) < p(|x|)$.

Определение

Проблема распознавания (множество) S **PSPACE**-полна, если

1. $S \in$ **PSPACE**,
2. любая проблема A из **PSPACE** полиномиально сводится к S, то есть существует функция f, вычислимая за полиномиальное время, такая, что

$$\forall x \; x \in A \Leftrightarrow f(x) \in S.$$

Верхняя оценка

Теорема

Проблема равенства в любой конечно определенной полугруппе с условием однородности определяющих соотношений лежит в **PSPACE**.

Верхняя оценка

Теорема

Проблема равенства в любой конечно определенной полугруппе с условием однородности определяющих соотношений лежит в **PSPACE**.

Определение

Проблема S принадлежит **NPSPACE**, если существует недетерминированная машина Тьюринга M и полином $p(n)$ такие, что $x \in S \Leftrightarrow \exists$ вычислительный путь τ M на x такой, что $M_\tau(x) = 1$ и $s_M(\tau, x) < p(|x|)$.

Верхняя оценка

Теорема

Проблема равенства в любой конечно определенной полугруппе с условием однородности определяющих соотношений лежит в **PSPACE**.

Определение

Проблема S принадлежит **NPSPACE**, если существует недетерминированная машина Тьюринга M и полином $p(n)$ такие, что $x \in S \Leftrightarrow \exists$ вычислительный путь τ M на x такой, что $M_\tau(x) = 1$ и $s_M(\tau, x) < p(|x|)$.

Недетерминированный алгоритм Адяна-Дурнева $\Rightarrow$ проблема равенства в **NPSPACE**.

Верхняя оценка

Теорема

Проблема равенства в любой конечно определенной полугруппе с условием однородности определяющих соотношений лежит в **PSPACE**.

Определение

Проблема S принадлежит **NPSPACE**, если существует недетерминированная машина Тьюринга M и полином $p(n)$ такие, что $x \in S \Leftrightarrow \exists$ вычислительный путь τ M на x такой, что $M_\tau(x) = 1$ и $s_M(\tau, x) < p(|x|)$.

Недетерминированный алгоритм Адяна-Дурнева $\Rightarrow$ проблема равенства в **NPSPACE**.

Теорема (У. Сэвич, 1980)

PSPACE = **NPSPACE**.

Нижняя оценка

Теорема

Существует конечно определенная полугруппа с условием однородности определяющих соотношений, в которой проблема равенства **PSPACE**-полна.

Нижняя оценка

Теорема

Существует конечно определенная полугруппа с условием однородности определяющих соотношений, в которой проблема равенства **PSPACE**-полна.

Идея: моделируем программу машины Тьюринга M, распознающую **PSPACE**-полную проблему над алфавитом X с помощью определяющих соотношений некоторой полугруппы, используя классическую технику Маркова-Поста.

Нижняя оценка

1. правилам переходов в программе M сопоставляем соотношения с условием однородности. Например, $(q_i, a) \to (q_j, b, R)$ сопоставлем $q_i ac = a q_i c$, для любого c из рабочего алфавита машины.

Нижняя оценка

1. правилам переходов в программе M сопоставляем соотношения с условием однородности. Например, $(q_i, a) \to (q_j, b, R)$ сопоставлем $q_i ac = aq_i c$, для любого c из рабочего алфавита машины.
2. эти правила описывают работу машины внутри рабочего куска ленты (не на краях)

Нижняя оценка

1. правилам переходов в программе M сопоставляем соотношения с условием однородности. Например, $(q_i, a) \to (q_j, b, R)$ сопоставлем $q_i ac = aq_i c$, для любого c из рабочего алфавита машины.
2. эти правила описывают работу машины внутри рабочего куска ленты (не на краях)
3. начальной конфигурации M на слове w соответствует $a_0^{p(n)} q_1 w a_0^{p(n)}$ – начальное слово. Здесь a_0 – пустой символ.

Нижняя оценка

1. правилам переходов в программе M сопоставляем соотношения с условием однородности. Например, $(q_i, a) \to (q_j, b, R)$ сопоставлем $q_i ac = aq_i c$, для любого c из рабочего алфавита машины.
2. эти правила описывают работу машины внутри рабочего куска ленты (не на краях)
3. начальной конфигурации M на слове w соответствует $a_0^{p(n)} q_1 w a_0^{p(n)}$ – начальное слово. Здесь a_0 – пустой символ.
4. соотношения $q_a a = aq_a$, $q_a a = q_a a_0$, $aq_a = a_0 q_a$, где q_a – допускающее состояние машины, a – любой рабочий символ.

Нижняя оценка

1. правилам переходов в программе M сопоставляем соотношения с условием однородности. Например, $(q_i, a) \to (q_j, b, R)$ сопоставлем $q_i ac = aq_i c$, для любого c из рабочего алфавита машины.
2. эти правила описывают работу машины внутри рабочего куска ленты (не на краях)
3. начальной конфигурации M на слове w соответствует $a_0^{p(n)} q_1 w a_0^{p(n)}$ – начальное слово. Здесь a_0 – пустой символ.
4. соотношения $q_a a = a q_a$, $q_a a = q_a a_0$, $a q_a = a_0 q_a$, где q_a – допускающее состояние машины, a – любой рабочий символ.
5. M допускает слово $w \Leftrightarrow a_0^{p(n)} q_1 w a_0^{p(n)}$ равно $q_a a_0^{2p(n)+|w|}$.

Мотивация

Теорема (Мясников, Осин)

Существует конечно порожденная группа, в которой проблема равенства не является генерически разрешимой.

Мотивация

Теорема (Мясников, Осин)

Существует конечно порожденная группа, в которой проблема равенства не является генерически разрешимой.

Проблема (Мясников)

Построить конечно порожденную группу, в которой проблема равенства разрешима, но не является генерически разрешимой за полиномиальное время.

Мотивация

Теорема (Мясников, Осин)

Существует конечно порожденная группа, в которой проблема равенства не является генерически разрешимой.

Проблема (Мясников)

Построить конечно порожденную группу, в которой проблема равенства разрешима, но не является генерически разрешимой за полиномиальное время.

Проблема

Построить конечно порожденную полугруппу с условием однородности определяющих соотношений, в которой проблема равенства не является генерически разрешимой за полиномиальное время.